

SÉRIE A : N° 1159

N° D'ORDRE : 2019

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES PHYSIQUES

PAR

ÉLIE CARAFOLI

INGÉNIEUR

Licencié ès Sciences

1^{re} THÈSE

**Contribution à la Théorie de la Sustentation
en Aérodynamique**

2^e THÈSE

Propositions données par la Faculté

soutenues le

1928, devant la Commission d'Examen

MM. CH. MAURAIN, *Président.*

L. MARCHIS,

A. TOUSSAINT.

Examineurs.

Etienne CHIRON, Éditeur

40, Rue de Seine, PARIS

1928

SÉRIE A : N° 1159

N° D'ORDRE : 2019

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES PHYSIQUES

PAR

ÉLIE CARAFOLI

INGÉNIEUR

Licencié ès Sciences

1^{re} THÈSE

**Contribution à la Théorie de la Sustentation
en Aérodynamique**

2^e THÈSE

Propositions données par la Faculté

soutenues le 19 JUL 1928, devant la Commission d'Examen

MM. CH. MAURAIN, *Président.*

L. MARCHIS, }
A. TOUSSAINT. } *Examineurs.*

Etienne CHIRON, Éditeur

40, Rue de Seine, PARIS

1928

FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

MM.

Doyen C. MAURAIN, *Professeur*, Physique du globe.

Doyen honoraire ... P. APPELL, M. MOLLIARD.

Profes^{rs} honoraires.. { P. PUISEUX. H. LEBESGUE.
V. BOUSSINESQ. A. FERNBACH.
A. JOANNIS. A. LEDUC.
H. LE CHATELIER.

ÉMILE PICARD Analyse supérieure et algèbre supérieure.
G. KOENIGS Mécanique physique et expérimentale.
E. GOURSAT Calcul différentiel et calcul intégral.
P. JANET Electrotechnique générale.
F. WALLERANT Minéralogie.
H. ANDOYER Astronomie.
P. PAINLEVÉ Mécanique analytique et mécanique céleste.
Gabriel BERTRAND .. Chimie biologique.
M^{me} P. CURIE..... Physique générale et radioactivité.
M. CAULLERY Zoologie (Évolution des êtres organisés).
G. URBAIN Chimie minérale.
Émile BOREL Calcul des probabilités et Phys. mathém.
L. MARCHIS Aviation.
Jean PERRIN Chimie physique.
Remy PERRIER .. Zoologie (Enseignement P. C. N.).
H. ABRAHAM Physique.
M. MOLLIARD Physiologie végétale.
E. CARTAN Géométrie supérieure.
L. LAPICQUE Physiologie générale.
E. VESSIOT Théorie des fonctions et théorie des transformations.
A. COTTON Physique générale.
J. DRACH Application de l'analyse à la géométrie.
Charles FABRY Physique.
Charles PÉREZ Zoologie.
Léon BERTRAND Géologie structurale et géologie appliquée.
R. LESPIEAU Théories chimiques.
E. RABAUD Biologie expérimentale.
P. PORTIER Physiologie comparée.
É. BLAISE Chimie organique.
P.-A. DANGEARD Botanique.
P. MONTEL Mécanique rationnelle.
P. WINTREBERT Anatomie et histologie comparées.
O. DUBOSCQ Biologie maritime.
G. JULIA Mathématiques générales.
A. JOB Chimie générale.
A. MAILHE..... Étude des combustibles.
L. LUTAUD..... Géographie physique et géologie dynamique.
Eugène BLOCH..... Physique théorique et physique céleste.
Henri VILLAT Mécanique des fluides et applications.
Ch. JACOB..... Géologie.
P. PASCAL..... Chimie appliquée.



E. HÉROUARD....	Zoologie.	E. DARMOIS....	Physique.
E. PÉCHARD.....	Chimie (Enst P. C. N.).	G. BRUHAT.....	Physique.
V. AUGER.....	Chimie analytique.	H. MOUTON.....	Chimie physique.
M. GUICHARD....	Chimie minérale.	L. JOLEAUD.....	Paléontologie.
A. GUILLET.....	Physique.	M. JAVILLIER....	Chimie biologique.
C. MAUGUIN.....	Minéralogie.	A. DUFOUR.....	Physique (P. C. N.).
L. BLARINGHEM..	Botanique.	F. PICARD.....	Zoologie (Evolution des êtres organisés).
A. MICHEL-LÉVY.	Pétrographie.	ROBERT-LÉVY...	Zoologie.
A. DEREIMS.....	Géologie.	A. DUNOYER.....	Optique appliquée.
R. DONGIER.....	Physique du globe.	A. GUILLIERMOND.	Botanique (P. S. N.).
A. DENJOY.....	Calcul différent. et int.	A. DEBIERNE....	Radioactivité.
H. BÉNARD.....	Physique (P. C. N.).		

Secrétaire..... Daniel TOMBECK.

A MESSIEURS

A. TOUSSAINT ET N. VASILESCO-KARPEN

Hommage respectueux et reconnaissant.

A MESSIEURS

CH. MAURAIN ET L. MARCHIS

AVANT-PROPOS

Grâce à une meilleure connaissance des phénomènes aérodynamiques et à une analyse plus approfondie des lois qui les régissent, l'Aviation, à l'heure actuelle, a pris un essor extraordinaire et les progrès réalisés dans ce domaine s'affirment chaque jour plus importants.

L'application à l'Aérodynamique des équations de l'Hydrodynamique rationnelle n'a fait que contribuer à cet état de choses, et le jour où l'analyse mathématique nous donnera les moyens de résoudre d'une manière complète le très compliqué problème du mouvement des fluides visqueux, nous pouvons espérer que la Technique aéronautique se sera affranchie des quelques lois empiriques, qui malheureusement existent encore à l'heure actuelle.

Mais d'ores et déjà, les résultats fournis par la Mécanique des fluides incompressibles et sans viscosité sont considérables et nous nous sommes efforcé d'en exposer ceux qui intéressent l'étude des ailes d'avion. Comme pour toutes les branches de la science, quelques hypothèses primordiales sont indispensables : mais une fois admises, les raisonnements mathématiques rigoureux nous amènent indiscutablement, aux fondements de la Théorie des ailes sustentatrices.

On sait que la base de cette théorie est le fameux théorème de Kutta-Joukowski, qui concerne spécialement les ailes d'envergure infinie; mais il peut être appliqué, comme l'a fait déjà M. Prandtl, aux ailes d'envergure limitée. Pour ces dernières, la méthode consiste à réduire le problème à une adaptation des résultats fournis par la théorie des ailes d'envergure infinie.

Aussi, nous avons cru utile de donner une extension importante au mouvement plan et de traiter, non seulement la translation rectiligne, mais aussi le mouvement le plus général, translation et rotation.

Nous avons fait de même pour les ailes d'envergure limitée et nous avons traité ensuite, en vue des vérifications dans les laboratoires aérodynamiques, de l'influence des surfaces rigides et libres.

Nous croyons avoir exposé, d'une manière approfondie, les principaux problèmes de l'Aérodynamique et nous faisons le vœu que ce travail puisse suggérer de nouvelles recherches théoriques et expérimentales si nécessaires encore dans ce domaine.

Avant de terminer, nous tenons à exprimer ici-même notre profonde gratitude à M. A. Toussaint, le savant Directeur de l'Institut Aérotechnique de Saint-Cyr, dont les conseils éclairés et le bienveillant intérêt qu'il nous a témoigné ont été pour nous le plus précieux concours.

AÉRODYNAMIQUE DES AILES D'AVION

THÉORIE ET APPLICATIONS

CHAPITRE PREMIER

INTRODUCTION A LA THÉORIE DE LA SUSTENTATION

§ 1. — *Lois fondamentales de l'Hydrodynamique.*

Nous allons supposer que les fluides, dont nous étudions le mouvement dans le présent travail, sont dépourvus de viscosité et incompressibles. du moins pour les vitesses usuelles rencontrées dans les applications. La masse contenue dans une surface fermée σ est soumise alors aux forces d'inertie, aux pressions normales à la surface et aux forces extérieures.

1. Equations générales. — Soit u la vitesse d'une particule fluide, p et ρ la pression et la densité qui règnent autour de cette particule et f la force extérieure rapportée à l'unité de masse. L'équation du mouvement en notations vectorielles (1) sera :

$$(1) \quad \frac{du}{dt} = f - \frac{1}{\rho} \text{grad } p.$$

Une autre équation est celle de continuité. Pour l'établir, nous allons évaluer la variation par unité de temps de la masse d'un volume τ limité par la surface σ . Cette variation est égale d'une part à l'intégrale :

$$\int_{\tau} \frac{\partial \rho}{\partial t} d\tau.$$

D'autre part, elle est égale à la masse qui passe par unité de temps à travers la surface σ . En appelant n le vecteur unitaire normal en chaque point de cette surface et dirigé vers l'intérieur, on aura :

$$\int_{\tau} \frac{\partial \rho}{\partial t} d\tau = \int_{\sigma} \rho u \times n d\sigma = - \int_{\tau} \text{div} (\rho u) d\tau,$$

(1) Voir l'appendice à la fin.

d'où
$$\frac{d\rho}{dt} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) = 0,$$

ou encore, en développant cette expression, on obtient :

$$(2) \quad \frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{u} = 0.$$

En explicitant la dérivée de la vitesse qui figure dans l'expression (1) et en supposant, comme nous l'avons déjà dit, la densité constante, on peut écrire finalement les trois équations générales :

$$(3) \quad \begin{cases} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \operatorname{grad} \frac{1}{2} u^2 + \operatorname{rot} \mathbf{u} \wedge \mathbf{u} = \mathbf{f} - \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p, \\ \operatorname{div} \mathbf{u} = 0, \\ \rho = \text{Cte} \end{cases}$$

Nous appellerons *tourbillon* d'un vecteur $\mathbf{u}$, l'opérateur $\operatorname{rot} \mathbf{u}$, que nous désignerons souvent par la lettre Ω . Nous remarquons dans ce cas que la définition cinématique du tourbillon correspond à la moitié de Ω .

En un point de l'espace fluide le tourbillon du vecteur $\mathbf{u}$ ($\operatorname{rot} \mathbf{u} = \Omega$) n'est pas nul en général. De même qu'une *ligne de courant*, est une ligne telle qu'en tous ses points la tangente coïncide avec la vitesse en ce point, une *ligne de tourbillon* est une courbe tangente en chacun de ses points au tourbillon en ce point.

2. Théorème de la circulation. — Supposons que la force extérieure $\mathbf{f}$ dérive d'une fonction de force U , la première des équations (3) devient alors :

$$(4) \quad \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \operatorname{grad} \left(\frac{p}{\rho} + \frac{1}{2} u^2 - U \right) + \Omega \wedge \mathbf{u} = 0.$$

En prenant le tourbillon de chaque terme de cette équation, on obtient la relation :

$$(5) \quad \frac{\partial \Omega}{\partial t} + \operatorname{rot}(\Omega \wedge \mathbf{u}) = 0.$$

Soit maintenant un contour fermé s et une surface σ s'appuyant sur ce contour. On appelle *circulation* le long du contour s , l'intégrale curviligne

$$\Gamma = \int_s \mathbf{u} \times \mathbf{t} \cdot d\mathbf{s},$$

où $\mathbf{t}$ représente le vecteur unité tangent au contour. D'après le théorème de Stokes et en appelant toujours $\mathbf{n}$ le vecteur unitaire normal à la surface, on pourra écrire :

$$(6) \quad \Gamma = \int_s \mathbf{u} \times \mathbf{t} \cdot d\mathbf{s} = \int_\sigma \Omega \times \mathbf{n} \cdot d\sigma.$$

Cette circulation ne varie pas avec le temps. En effet, on a successivement :

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \frac{d}{dt} \int_\sigma \Omega \times \mathbf{n} \cdot d\sigma = \int_\sigma \left\{ \frac{\partial \Omega}{\partial t} \times \mathbf{n} + \mathbf{n} \times (\mathbf{u} \operatorname{div} \Omega + \operatorname{rot}(\Omega \wedge \mathbf{u})) \right\} \cdot d\sigma,$$

d'où

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \int_{\sigma} \mathbf{n} \times \left(\frac{\partial \Omega}{\partial t} + \text{rot}(\Omega \wedge \mathbf{u}) \right) d\sigma = 0,$$

puisque l'expression entre parenthèses est nulle d'après (5). Ainsi donc : *la circulation le long d'une ligne fermée ne varie pas avec le temps*. C'est le théorème de lord Kelvin.

Supposons qu'à un instant le tourbillon Ω soit nul (*mouvement irrotationnel*) dans tout le fluide. La circulation autour de tout contour fermé est alors nulle et elle restera nulle indéfiniment. Il s'ensuit qu'à tout instant on aura

$$\Omega = \text{rot } \mathbf{u} = 0,$$

et par suite

$$\mathbf{u} = \text{grad } \varphi,$$

φ s'appelle le *potentiel des vitesses* et est une fonction *uniforme* du point de l'espace considéré. Cette fonction varie en général avec le temps.

Inversement, si à un instant on a $\mathbf{u} = \text{grad } \varphi$, le tourbillon

$$\Omega = \text{rot } \mathbf{u}$$

sera nul et, d'après le théorème de Lord Kelvin, il restera nul indéfiniment ; d'où, *si à un moment donné il existe un potentiel des vitesses* ($\Omega = 0$), *il en existera un à tout instant*. C'est le théorème de Lagrange.

3. Equations de la pression. — Supposons d'abord qu'il existe un potentiel des vitesses ($\Omega = \text{rot } \mathbf{u} = 0$), l'équation (4) devient :

$$\text{grad} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} u^2 + \frac{p}{\rho} - U \right) = 0,$$

d'où

$$(7) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} u^2 + \frac{p}{\rho} - U = C.$$

C'est l'équation de la pression donnée par Lagrange et appliquée au mouvement irrotationnel variable avec le temps. La constante du deuxième membre ne dépend que du temps t , mais on peut la faire entrer dans $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$, puisque φ n'est déterminé qu'à une constante près, qui ne dépend que du temps. On peut remplacer alors la constante du deuxième membre de (7) par zéro.

Quand les caractéristiques du mouvement (vitesses, pressions, etc.) varient d'un point à un autre, mais sont indépendantes du temps, le mouvement est dit *permanent*. L'expression de la vitesse ne contient pas explicitement le temps et l'équation (4) du mouvement *rotationnel* ($\Omega \neq 0$) devient :

$$\text{grad} \left(\frac{p}{\rho} + \frac{1}{2} u^2 - U \right) + \Omega \wedge \mathbf{u} = 0.$$

En multipliant scalairement les deux termes du premier membre par dP , variation du point P considéré, on aura :

$$(8) \quad d\left(\frac{p}{\rho} + \frac{1}{2} u^2 - U\right) + \Omega \wedge u \times dP = 0.$$

Si dP est pris le long d'une ligne de courant ou le long d'une ligne de tourbillon, on aura respectivement

$$dP = u dt, \quad dP = \Omega ds,$$

et dans les deux cas le deuxième terme du premier membre de (8) est nul; d'où il en résulte le théorème de Bernoulli :

$$(9) \quad \frac{p}{\rho} + \frac{1}{2} u^2 - U = C.$$

La constante C est la même pour une ligne de courant ou une ligne de tourbillon, mais elle varie d'une ligne à l'autre. Dans le cas du mouvement irrotationnel, la constante C a la même valeur dans tout le fluide.

4. Mouvement impulsif. — Revenons à l'équation (1) du début et supposons que le mouvement a lieu brusquement. Soit $t_1 - t_0$ l'intervalle de temps pendant lequel s'accomplit le mouvement et intégrons l'équation (1) dans cet intervalle de temps; il s'ensuit

$$(10) \quad u_1 - u_0 = \int_{t_0}^{t_1} f dt - \frac{1}{\rho} \int_{t_0}^{t_1} \text{grad } p dt.$$

En admettant maintenant que les forces f n'atteignent pas de valeurs de l'ordre de $\frac{1}{t_1 - t_0}$, on peut écrire :

$$(11) \quad u = u_1 - u_0 = -\frac{1}{\rho} \text{grad} \int_{t_0}^{t_1} p dt,$$

d'où il en résulte que les vitesses supplémentaires u , dues au choc, dérivent d'un potentiel φ tel que

$$(12) \quad \rho \varphi = - \int_{t_0}^{t_1} p dt + C.$$

La constante C peut entrer d'ailleurs dans l'expression du potentiel φ .

5. Conditions à la limite. — Connexion. — Jusqu'à présent nous n'avons pas tenu compte de l'étendue de la masse fluide, non plus que des obstacles solides immergés dans cette masse. Supposons par exemple que le fluide soit contenu dans un réservoir et qu'un nombre fini de solides soient en mouvement à l'intérieur. On appelle *conditions à la limite* les contraintes auxquelles est assujéti le mouvement à la proximité immédiate des parois du réservoir ou des solides immergés. On admet par *hypothèse* que le fluide ne peut pas quitter la paroi, mais qu'il glisse tangentiellement à cette paroi (1). Autrement dit, soit u_n la composante de la vitesse d'un

(1) Si on admet que le fluide peut quitter la paroi en un nombre fini de points, on aura affaire à des mouvements à surfaces de discontinuités (Kirchoff-Helmholtz), dont nous ne nous occupons pas dans la présente étude.

élément de la paroi suivant la normale à cet élément; les particules fluides contiguës ont la même composante de vitesse suivant cette normale, qui est supposée dirigée vers l'intérieur du fluide. Dans le cas du mouvement irrotationnel, cette condition s'exprime par la relation

$$(13) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial n} = u_n,$$

ou φ représente le potentiel des vitesses, dont la dérivée est prise suivant la normale. Si la paroi est immobile cette dérivée est nulle.

Il faut remarquer que si le fluide a été initialement au repos, les vitesses dues au mouvement des solides immergés dérivent d'un potentiel *uniforme* φ . De sorte que le mouvement général pourrait être caractérisé par ce potentiel, auquel s'ajoute une autre vitesse $\mathbf{v}$, dérivant ou non d'un potentiel; mais de toute manière, cette vitesse additionnelle a une composante normale à la paroi nulle.

Un volume est dit *simplement connexe*, quand une ligne fermée, tracée à l'intérieur du volume, peut se réduire à un point par déformation continue sans en sortir du volume. Le volume d'une sphère par exemple est simplement connexe. Si, au contraire, la ligne fermée ne peut pas se réduire à un simple point, le volume est dit à connexion multiple. Le volume d'une chambre parallélépipédique traversée par une colonne est à connexion multiple, car, parmi les lignes fermées qu'on peut tracer, il y en a une catégorie qui entourent la colonne et qui ne peuvent, par conséquent, se réduire en un point sans couper la colonne. Supposons qu'on mène une cloison de la colonne à la paroi de la chambre, le volume limité par les parois, y compris la cloison, est devenu simplement connexe. S'il est nécessaire de mener $n-1$ cloisons pour que le volume devienne simplement connexe, on dit que ce volume est à *connexion d'ordre* n .

Il est évident qu'un mouvement irrotationnel dans un domaine simplement connexe est régi par un potentiel uniforme. Dans un domaine à connexion multiple la circulation autour de certaines lignes peut être différente de zéro, ce qui entraîne un potentiel *polytrophe*.

6. Energie cinétique. — Considérons un mouvement général, on peut décomposer la vitesse en deux parties : l'une $\mathbf{u}$ qui dérive d'un potentiel uniforme φ et l'autre $\mathbf{v}$ qui a une composante normale à la paroi nulle. L'énergie cinétique de la masse fluide de volume τ sera :

$$T = \frac{1}{2} \rho \int_{\tau} (\mathbf{u} + \mathbf{v})^2 d\tau = \frac{1}{2} \rho \int_{\tau} (u^2 + v^2) + 2\mathbf{u} \times \mathbf{v} d\tau,$$

ou encore,

$$T = \frac{1}{2} \rho \left\{ \int_{\tau} \text{grad}^2 \varphi d\tau + \int_{\tau} v^2 d\tau + 2 \int_{\tau} \mathbf{v} \times \text{grad} \varphi d\tau \right\}.$$

On a d'une part,

$$(14) \quad \text{grad}^2 \varphi \equiv \text{div} (\varphi \text{ grad } \varphi) - \varphi \text{ div } \mathbf{v}$$

et d'autre part,

$$(14) \quad \mathbf{v} \times \text{grad } \varphi = \text{div} (\varphi \mathbf{v}) - \varphi \text{ div } \mathbf{v}$$

d'où il s'ensuit pour l'expression de T :

$$(16) \quad T = \frac{1}{2} \rho \left\{ \int_{\tau} \text{div} (\varphi \text{ grad } \varphi) d\tau + 2 \int_{\tau} \text{div} (\varphi \mathbf{v}) d\tau + \int_{\tau} v^2 d\tau \right\},$$

ou encore, en appliquant le théorème de Green :

$$(17) \quad T = \frac{1}{2} \rho \left\{ - \int_{\sigma} \varphi \text{ grad } \varphi \times \mathbf{n} d\sigma - 2 \int_{\sigma} \varphi \mathbf{v} \times \mathbf{n} d\sigma + \int_{\tau} v^2 d\sigma \right\},$$

σ représente la surface totale limitant extérieurement et intérieurement le fluide. Nous avons supposé φ uniforme, comme par ailleurs les vitesses $\mathbf{v}$ ont une composante normale à la paroi nulle ($\mathbf{v} \times \mathbf{n} = 0$), la deuxième intégrale du deuxième membre est nulle, et il en résulte que l'énergie cinétique totale est égale à l'énergie cinétique due au mouvement irrotationnel à potentiel uniforme plus celle due aux vitesses $\mathbf{v}$. Comme ces deux quantités sont essentiellement positives, l'énergie cinétique devient minimum pour $\mathbf{v} = 0$, d'où le théorème de lord Kelvin : *l'énergie cinétique du mouvement irrotationnel est moindre que tout autre mouvement qui admet les mêmes composantes de vitesses normales à la paroi.*

Supposons que la vitesse $\mathbf{v}$ dérive d'un potentiel multiforme (mouvement cyclique), que nous allons désigner par χ . La deuxième intégrale de (17) est toujours nulle; pour évaluer les deux autres, nous allons tracer dans tout le domaine fluide des surfaces telles que le domaine devienne à connexion simple.

A travers chaque cloison le potentiel multiforme χ subit une discontinuité. Sur toute la cloison la différence des deux valeurs de χ , correspondant aux deux faces de la cloison, est une constante, que nous allons désigner par h_k si elle se rapporte à la cloison K.

L'expression (17) devient

$$(18) \quad T = - \frac{1}{2} \rho \left\{ \int_{\sigma} \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n} d\sigma + \int_{\sigma} \chi \frac{\partial \chi}{\partial n} d\sigma \right\}, \quad (1)$$

mais σ représente dans ce cas les parois limitant le fluide intérieurement et extérieurement et les surfaces des cloisons. En remarquant que φ est uniforme et par conséquent continu à travers les cloisons et que $\frac{\partial \chi}{\partial n}$ est différente de zéro sur les cloisons, on peut écrire finalement :

$$(19) \quad T = - \frac{1}{2} \rho \left\{ \int_{\Sigma} \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n} d\sigma + \sum_{k=1}^{n-1} h_k \int_{\sigma_k} \frac{\partial \chi}{\partial n} d\sigma_k \right\},$$

(1) $\text{Grad } \varphi \times \mathbf{n}$ de la formule (17) et $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$ de la formule (18) ont la même signification et représentent la composante de la vitesse normale à la paroi.

où Σ représente la surface des parois et σ_k celle de la cloison. Si on fait tendre à l'infini en tous ses points le réservoir contenant le fluide, la formule (19) reste valable pour le cas d'un fluide indéfini ; parce que sur les parois du réservoir les deux intégrales du deuxième membre sont constamment nulles.

§ 2. — Propriétés des Tourbillons.

Nous avons défini plus haut ce qu'on appelle une *ligne de courant* et une *ligne de tourbillon*. Considérons maintenant un contour s et toutes les lignes de courant et les lignes de tourbillon qui s'appuient sur ce contour. Les premières constituent un *filet fluide*, les deuxièmes un *tube de tourbillons*. Le *flux* de courant ou de tourbillon traversant une surface fermée σ est nul, parce qu'on a respectivement

$$-\int_{\sigma} \mathbf{u} \times \mathbf{n} d\sigma = \int_{\tau} \operatorname{div} \mathbf{u} d\tau = 0, \quad -\int_{\sigma} \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{n} d\sigma = \int_{\tau} \operatorname{div} \boldsymbol{\Omega} d\tau = 0.$$

Un tube de tourbillons ne peut pas se terminer brusquement dans le fluide, mais se referme sur lui-même en anneau, se fixe à la paroi du réservoir ou s'étend à l'infini.

Considérons un tel tube de tourbillons et traçons sur sa surface latérale un contour quelconque. La circulation le long de ce contour est nulle, car les tourbillons sont tous tangents à la surface du tube. Au bout d'un certain temps les points de cette surface occupent une autre position, ainsi que le contour, le long duquel la circulation est toujours nulle. Il s'ensuit que les tourbillons restent tangents à la surface dans sa nouvelle position et qu'elle compose par conséquent continuellement la paroi du tube de tourbillons. Celui-ci est *formé toujours des mêmes particules*.

1. Champ des vitesses. — Quand on connaît à un instant t les vitesses $\mathbf{u}$ en tous les points du fluide, il est facile de déterminer la distribution des tourbillons, d'après la relation

$$(20) \quad \boldsymbol{\Omega} = \operatorname{rot} \mathbf{u}.$$

Inversement, si nous connaissons le tourbillon en chaque point d'un fluide indéfini, nous pouvons en déduire, d'après l'équation (20), le *champ des vitesses*. Pour cela, considérons un autre vecteur $\mathbf{v}$, tel que $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$; on peut toujours mettre

$$(21) \quad \mathbf{u} = \operatorname{rot} \mathbf{v} \quad (1) \quad (\operatorname{div} \mathbf{u} = \operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{v} = 0).$$

En remarquant plus loin qu'on a

$$(22) \quad \nabla^2 \mathbf{v} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{v} - \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{v},$$

(1) P. Appell : *Traité de mécanique rationnelle*, tome III, page 416, Librairie Gauthier-Villars, 1909, Paris.

on obtient la relation fondamentale :

$$(23) \quad \nabla^2 \mathbf{v} = -\Omega.$$

Il y a deux régions dans le fluide : l'une où Ω n'est pas nul, l'autre où il est nul. La première, dont nous allons désigner le volume par τ , est composée d'anneaux tourbillons (1); le mouvement de la seconde est régi par un potentiel des vitesses et par conséquent le deuxième membre de (23) est nul.

En considérant un système d'axes trirectangle droit, v_x, v_y, v_z les projections du vecteur $\mathbf{v}$ sur ces axes et $\Omega_x, \Omega_y, \Omega_z$ celles de Ω , l'expression (23) se divise en trois autres :

$$(23') \quad \Delta v_x = -\Omega_x, \dots$$

Par analogie avec le potentiel d'une masse attirante dont la densité serait $\rho = \frac{\Omega_x}{4\pi}$, qui a identiquement la même forme que (23'), on peut écrire finalement pour le vecteur $\mathbf{v}$:

$$(24) \quad \mathbf{v} = -\frac{1}{4\pi} \int_{\tau} \frac{\Omega}{r} d\tau,$$

où r représente la distance du point P à un élément $d\tau$ du volume tourbillonnaire. En décomposant le volume τ en anneaux-tourbillons élémentaires de section $d\sigma$ et en appelant $d\Gamma = \Omega \times d\sigma$ l'intensité tourbillonnaire constante le long de l'anneau, on peut encore écrire, d'après la relation $\Omega d\sigma ds = d\Gamma dr$ (fig. 1) :

$$(24') \quad \mathbf{v} = -\frac{1}{4\pi} \int_{\tau} \frac{\Omega d\sigma \cdot ds}{r} = -\frac{1}{4\pi} \sum d\Gamma \int_s \frac{dr}{r},$$

d'où il en résulte :

$$(25) \quad \mathbf{u} = \text{rot } \mathbf{v} = \frac{1}{4\pi} \sum d\Gamma \int_s \frac{\mathbf{r} \wedge d\mathbf{r}}{r^3} = \frac{1}{4\pi} \int_{\tau} \frac{\mathbf{r} \wedge \Omega}{r^3} d\tau,$$

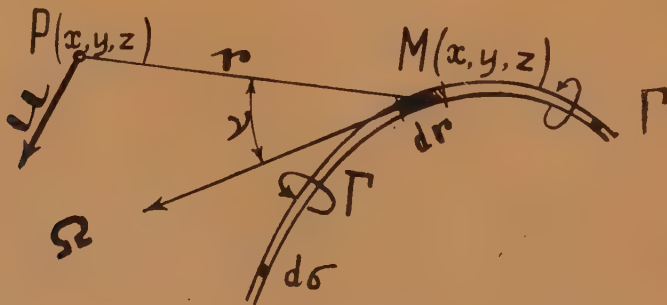


Fig. 1.

S'il s'agit d'un tube de tourbillon infiniment délié, dont l'intensité cependant soit finie [$\Gamma = \Omega \times d\sigma$], on peut écrire (fig. 1) :

$$(26) \quad \mathbf{u} = \frac{\Gamma}{4\pi} \int_s \frac{\mathbf{r} \wedge d\mathbf{r}}{r^3}$$

(1) Appell : *loc. cit.*, page 413.

et pour un élément ds :

$$(26') \quad |du| = \left| \frac{\Gamma}{4\pi} \cdot \frac{\mathbf{r} \wedge d\mathbf{r}}{r^3} \right| = \frac{\Gamma}{4\pi} \cdot \frac{\sin \nu ds}{r^2}.$$

C'est la loi de Biot-Savart.

Par rapport aux coordonnées cartésiennes, en désignant par ξ, η, ζ celles du point P, par x, y, z celles du point M (correspondant à l'élément ds de l'anneau) et par u_ξ, u_η, u_ζ les projections de la vitesse au point P, on obtient les trois relations :

$$(27) \quad \begin{cases} u_\xi = \frac{\Gamma}{4\pi} \int_s \frac{(y - \eta)dz - (z - \zeta)dy}{\sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2}^3} \\ u_\eta = \frac{\Gamma}{4\pi} \int_s \frac{(z - \zeta)dx - (x - \xi)dz}{\sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2}^3} \\ u_\zeta = \frac{\Gamma}{4\pi} \int_s \frac{(x - \xi)dy - (y - \eta)dx}{\sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2}^3} \end{cases}$$

En appliquant la loi de Biot-Savart (26') à une portion AB de tourbillon rectiligne (fig. 2), on obtient :

$$(28) \quad u = \frac{\Gamma}{4\pi a} (\cos \alpha - \cos \beta)$$

où a représente la distance du point P au tourbillon rectiligne.

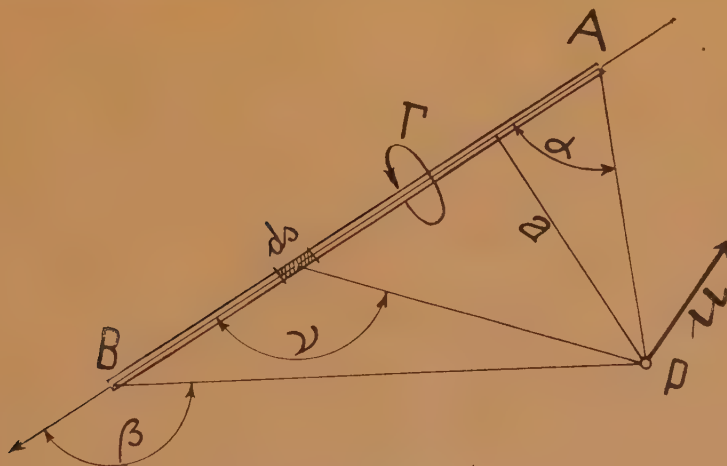


Fig. 2.

Nous avons dit qu'en dehors de l'anneau le mouvement est irrationnel et par conséquent il y a un potentiel des vitesses. A un coefficient de proportionnalité près, le champ des vitesses est identique au champ magnétique dû à un courant électrique de même circuit que le tourbillon et d'intensité Γ . Il en résulte que le potentiel a la même forme et peut

s'écrire, en appelant θ l'angle solide sur lequel on voit l'anneau du point P :

$$(29) \quad \Phi = \frac{\Gamma}{4\pi} \theta.$$

2. Quantité de mouvement communiquée par un anneau-tourbillon. — Considérons une direction arbitraire x et évaluons la projection de la quantité de mouvement d'un anneau-tourbillon suivant cette direction. Pour cela divisons l'espace en une infinité de cylindres élémentaires de section droite $d\sigma_x$ et de génératrices parallèles à x . La vitesse suivant la direction x sera, en désignant par Φ le potentiel :

$$u_x = \frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\Gamma}{4\pi} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial x},$$

et la quantité de mouvement correspondant à un de ces cylindres élémentaires, qui s'étend de l'infini amont à l'infini aval :

$$dQ_x = \rho \int_{-\infty}^{+\infty} u_x d\sigma_x dx = \rho \frac{\Gamma}{4\pi} d\sigma_x \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial \theta}{\partial x} dx.$$

On voit que l'intégrale du deuxième membre est nulle pour tous les cylindres qui ne pénètrent pas à l'intérieur de l'anneau-tourbillon, et égale à 4π pour ceux qui en pénètrent.

Il s'ensuit alors, en appelant σ_x la surface limitée par la projection du contour de l'anneau sur un plan normal à x :

$$Q_x = \rho \Gamma \sigma_x.$$

En considérant une surface quelconque Σ qui s'appuie sur le contour de l'anneau et en mettant $\mathbf{6} = \int \mathbf{n} d\Sigma$, où $\mathbf{n}$ est le vecteur unitaire normal à Σ , on peut écrire la relation générale :

$$(30) \quad \mathbf{Q} = \rho \Gamma \mathbf{6},$$

et la variation de la quantité de mouvement :

$$(31) \quad \frac{d\mathbf{Q}}{dt} = \rho \Gamma \frac{d\mathbf{6}}{dt}.$$

Cette variation est égale à la résultante des pressions exercées par l'anneau sur le fluide, parce que les pressions à l'infini ont une résultante nulle.

3. Couche de tourbillons. — Soit σ une surface quelconque à travers laquelle nous allons admettre que la vitesse subit une discontinuité. Figurons-nous que cette discontinuité s'accomplit sur une hauteur δ très mince, de sorte que la surface de discontinuité σ est remplacée par deux autres infiniment rapprochées σ_1 et σ_2 , qui admettent la même normale $\mathbf{n}$. En désignant par $\mathbf{u}_1$ et par $\mathbf{u}_2$ respectivement les vitesses au même point sur les deux faces σ_1 et σ_2 et par $\mathbf{v}$ la différence $\mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1$, nous pouvons

écrire l'expression de la vitesse u au point de hauteur η de la couche (fig. 3) :

$$(32) \quad u = u_1 + \frac{\eta}{\delta} v.$$

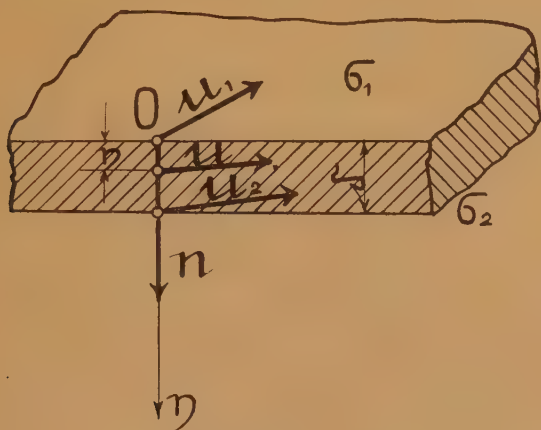


Fig. 3.

Supposons qu'en dehors de la couche le mouvement est irrotationnel ; le tourbillon au point η sera alors :

$$(33) \quad \text{rot } u = \frac{1}{\delta} \text{grad } \eta \wedge v = \frac{1}{\delta} n \wedge v.$$

Ainsi donc la surface de discontinuité représente une couche tourbillonnaire dont l'intensité est uniformément répartie sur son épaisseur et les tourbillons sont tangents à la surface de discontinuité.

Analysons de plus près deux cas qui vont nous être utiles par la suite.

a) $u_1 = 0$ et v est parallèle à la surface. On voit, d'après l'expression (33), que le tourbillon est perpendiculaire à la vitesse au même point. Ce cas se présente quand on supprime la paroi d'un réservoir et on le remplace par une couche tourbillonnaire telle que sa face extérieure limite une masse de fluide immobile et la face intérieure joue le même rôle que la paroi intérieure du réservoir même, sur laquelle les vitesses sont tangentes. Pour conserver l'équilibre des pressions agissant sur la paroi, il faut supposer que chaque élément de couche tourbillonnaire est soumis à un effort équivalent que nous allons déterminer plus loin dans un cas précis.

b) u_1 et u_2 , dirigées arbitrairement par rapport à la surface de discontinuité, ont une même grandeur mais directions différentes. La différence v est alors perpendiculaire à la bissectrice formée par u_1 et u_2 , de sorte que le tourbillon (normal à v) est dirigé suivant cette bissectrice, c'est-à-dire suivant la vitesse moyenne $\frac{1}{2} (u_1 + u_2)$. C'est le cas d'une nappe

de tourbillons sur les deux faces de laquelle la pression en un même point serait la même. Comme nous avons supposé qu'en dehors de la couche le mouvement est irrotationnel, la constante de l'équation de Bernoulli est la même et par conséquent les vitesses ont une même grandeur absolue.

§ 3. — Application à l'Aérodynamique.

Jusqu'ici nous avons parlé d'un fluide quelconque incompressible et dénué de viscosité. S'il s'agit de l'air en particulier, les phénomènes qui s'y rattachent sont dits *aérodynamiques*. L'*Aérodynamique* est par conséquent l'application de l'Hydrodynamique à l'air dont on néglige la compressibilité pour les vitesses usuelles rencontrées en *aviation*. Il en est de même des forces extérieures, ici le poids de l'air, qui sont très petites par rapport aux pressions.

Soit un corps qui se déplace dans un fluide initialement au repos, nous avons vu qu'il s'établit un potentiel des vitesses uniforme; si en outre le mouvement de ce corps est rectiligne et uniforme, on trouve que la résultante des pressions qui s'exercent sur le solide est nulle. C'est le *paradoxe de d'Alembert* qui est une conséquence directe de l'uniformité du potentiel. Nous savons qu'en réalité le solide en mouvement éprouve de la part du fluide une *résistance*; il faut alors admettre que le potentiel n'est plus uniforme, mais *polytrophe* et que dans la plupart des cas une surface de discontinuité de la vitesse accompagne le solide dans son mouvement. Pour mieux analyser les conséquences qui résultent de cette hypothèse, on recourt à un artifice dont l'application aux *ailes sustentatrices* est due à Prandtl.

1. *Aile sustentatrice fluide*. — Quoique toutes les formes des obstacles intéressent l'aérodynamique, il y en a cependant une catégorie spéciale d'une importance considérable sur laquelle les prévisions théoriques se vérifient remarquablement: *ce sont les ailes sustentatrices, dont les propriétés peuvent être étendues aux hélices aériennes.*

Soit une telle aile (fig. 4) et considérons une section normale à la direction générale de l'*envergure*. Pour une raison que nous allons expliquer plus loin, nous supposerons que les filets fluides ne contournent pas la pointe B de l'aile, mais qu'ils s'écoulent tangentiellement aux deux surfaces formant dièdre en B. Soit L_1 et L_2 deux lignes de courant qu'on prend aussi près que possible et qui, venant de l'infini amont, aboutissent à l'infini aval. Nous avons considéré implicitement le mouvement relatif de l'air par rapport à l'aile animée d'une vitesse rectiligne et uniforme. Tout se passe comme si l'aile était immobile et l'air

était animé d'une vitesse de translation égale et de signe contraire à celle de l'aile.

Les lignes telles que L_1 et L_2 forment des surfaces Σ_1 et Σ_2 qui entourent complètement l'aile. Il n'est rien changé au mouvement si on solidifie brusquement les surfaces Σ_1 et Σ_2 . Si par conséquent sur les lignes L_1 et L_2 les vitesses et les pressions restent toujours les mêmes,

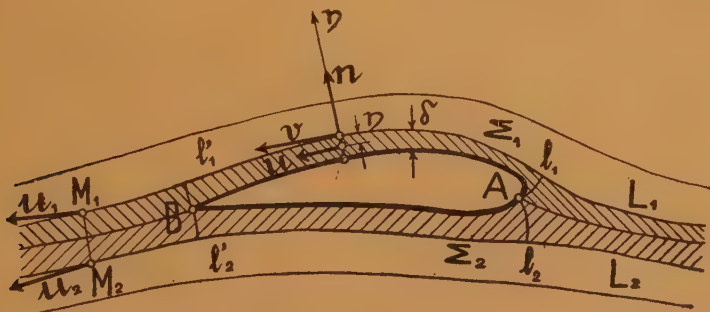


Fig. 4.

le changement apporté à la masse fluide comprise entre les surfaces Σ_1 et Σ_2 et les parois de l'aile n'influe pas sur le mouvement extérieur. On peut alors imposer à cette masse, dont nous allons désigner le volume par τ , un mouvement tel que sur la paroi de l'aile la vitesse soit nulle et sur Σ_1 et Σ_2 , elle soit celle du mouvement général. Le mouvement dans ce volume est rotationnel et la couche mince comprise entre les surfaces Σ_1 , Σ_2 et les parois de l'aile est une couche de tourbillons. Les particules venant de l'infini, ayant par hypothèse des vitesses compatibles avec le mouvement de la couche, ne dérivent pas, en général, d'un potentiel. Comme d'autre part en amont le mouvement doit être irrotationnel, effectuons sur les lignes L_1 , L_2 une légère modification telle que, tout en satisfaisant à la loi de continuité, nous puissions regarder les particules fluides comme dépourvues de rotation sur tout le parcours de l'infini amont jusqu'au point A et les lignes l_1 et l_2 issues de A. Supposons que l'intérieur de l'aile soit rempli avec du fluide en repos et qu'il communique avec l'extérieur par une fissure pratiquée au point A. Nous allons admettre en outre qu'à ce point aboutit la ligne neutre N et qu'il correspond par conséquent au point de vitesse nulle. La pression qui règne autour du point A est transmise par la fissure au fluide de l'intérieur. De cette manière l'équation de Bernoulli

$$(9) \quad \frac{p}{\rho} + \frac{1}{2} u^2 = C^{te} \quad (1),$$

(4) Dans l'expression (9) le potentiel U des forces extérieures a été omis, car le poids de l'air est négligeable.

est applicable en tout point du fluide, même dans la couche tourbillonnaire et au fluide de l'intérieur de l'aile. En effet, toutes les particules viennent de l'infini amont, où le mouvement est irrotationnel, et la constante de Bernoulli est la même sur toutes les lignes de courant.

Si on supprime la paroi de l'aile, le mouvement ne change pas et on a l'avantage d'appliquer les équations générales sur toute la masse fluide sans aucune contrainte de paroi. Analysons le mouvement dans le volume τ compris entre les surfaces $\Sigma_1 \Sigma_2$ et les parois de l'aile. La portion de la masse comprise entre l'infini amont et les lignes $l_1 l_2$ obéit à un potentiel; la couche qui était auparavant en contact avec les parois de l'aile est le siège de tourbillons uniformément répartis sur toute la hauteur δ de la couche. En effet, en appelant $\mathbf{v}$ la vitesse à la face extérieure (vitesse du mouvement général) et $\mathbf{u}$ celle à la hauteur η de la couche, on aura analogiquement aux équations (32) et (33) du paragraphe précédent :

$$(32') \quad \mathbf{u} = \frac{\eta}{\delta} \mathbf{v},$$

$$(33') \quad \text{rot } \mathbf{u} = \boldsymbol{\Omega} = \frac{1}{\delta} \mathbf{n} \wedge \mathbf{v}.$$

Le tourbillon garde une valeur constante sur toute la couche et il est à la fois tangent à la paroi de l'aile et normal à la vitesse correspondante.

Quant à la portion, qui, partant du bord de sortie de l'aile (lignes $l_1 l_2$), s'étend à l'infini, elle présente une nappe de tourbillons parallèles au courant général. En effet, en deux points voisins $M_1 M_2$, le long de $M_1 M_2$ la vitesse pourrait présenter une discontinuité, mais les pressions sont les mêmes en M_1 et M_2 . Il en résulte de l'équation de Bernoulli

$$\frac{p_1}{\rho} + \frac{1}{2} u^2 = \frac{p_2}{\rho} + \frac{1}{2} u_2^2 = \text{Cte},$$

que les vitesses ont la même grandeur, pouvant différer par leur orientation seulement. En désignant par $\mathbf{v}$, comme dans le paragraphe précédent, la différence $\mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1$, et par δ l'épaisseur $M_1 M_2$, on aura identiquement :

$$(32'') \quad \mathbf{u} = \frac{\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2}{2} + \left(\frac{\eta}{\delta} - \frac{1}{2} \right) \mathbf{v},$$

$$(33'') \quad \text{rot } \mathbf{u} = \boldsymbol{\Omega} = \frac{1}{\delta} \mathbf{n} \wedge \mathbf{v}.$$

On voit ainsi que le tourbillon est uniformément réparti sur toute la hauteur et qu'il est dirigé suivant la vitesse moyenne du courant aux points $M_1 M_2$ (fig. 5). Dans le cas du mouvement plan $\mathbf{u}_1$ et $\mathbf{u}_2$ sont parallèles, $\mathbf{v} = 0$ et $\boldsymbol{\Omega} = 0$.

La suppression des parois de l'aile réduit le problème au mouvement

des tourbillons dans un fluide indéfini et la solution est simple dès qu'on connaît la distribution de ceux-ci. On peut démontrer, en effet, que le mouvement autour de l'aile est identique à celui dû à une vitesse constante $\mathbf{V}$ à laquelle s'ajoute les vitesses communiquées par les susdits tourbillons. Il faut remarquer seulement que cette fiction de remplacer l'aile solide par une « aile fluide » ne résout pas le problème; mais elle

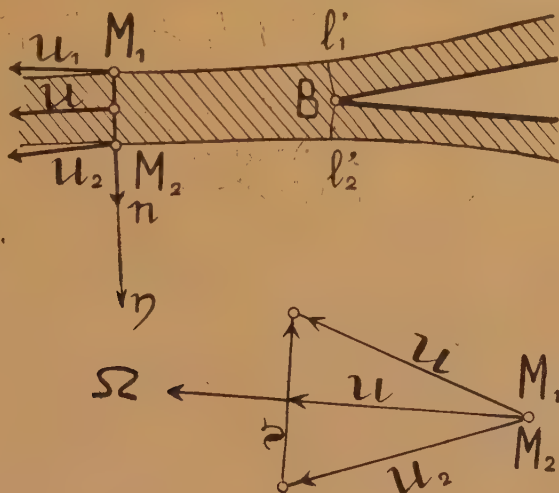


Fig. 5.

nous permet d'analyser le phénomène plus intimement et d'apporter dans nombre de cas d'importantes approximations capables de simplifier remarquablement le problème. Ainsi par exemple, nous pouvons supposer que les actions qui s'exercent sur un élément de la paroi de l'aile et qui se traduisent par une réaction de cet élément sur le fluide, sont localisées dans la couche tourbillonnaire.

De cette manière, un *élément volumétrique* de cette couche (une fois la paroi supprimée) est soumis à un effort élémentaire qui peut être regardé comme une force extérieure agissant sur l'unité de volume. En appelant $\mathbf{f}$ cette force, qui est la seule, car on a négligé le poids de l'air, la première équation de l'Hydrodynamique s'écrit :

$$(34) \quad \text{grad} \left(\frac{1}{2} u^2 + \frac{p}{\rho} \right) + \Omega \wedge \mathbf{u} = \frac{\mathbf{f}}{\rho}$$

d'où, en remarquant que la constante de Bernoulli est la même dans tout le fluide,

$$(35) \quad \mathbf{f} = \rho \Omega \wedge \mathbf{u}.$$

On voit donc que la force est à la fois normale au tourbillon de la particule à laquelle elle s'applique et à la vitesse de cette particule. On déduit de la relation (35) que $\mathbf{f}$ est nulle lorsque Ω et $\mathbf{u}$ sont parallèles,

de sorte que la nappe tourbillonnaire qui s'étend derrière l'aile n'est soumise à aucune force. De ce fait on l'appelle la nappe de *tourbillons libres*, par opposition aux autres attachées à la paroi qui s'appellent *tourbillons liés* (1).

Calculons maintenant l'effort par unité de surface de la couche. Soit Π cet effort, on aura :

$$(36) \quad \Pi = \int_0^\infty \mathbf{f} \cdot d\tau = \frac{\rho}{\partial^2} \mathbf{n} \times \mathbf{v} \wedge \mathbf{v} \int_0^\infty \tau_1 d\tau_1 = \frac{\rho}{2} \mathbf{n} \times \mathbf{v} \wedge \mathbf{v},$$

et

$$(36) \quad |\Pi| = \frac{\rho}{2} \left| \mathbf{n} \times \mathbf{v} \wedge \mathbf{v} \right| = \frac{\rho}{2} v^2.$$

On voit, comme on devait s'y attendre d'ailleurs, que Π est égal à la pression exercée au même point par la paroi de l'aile sur le fluide. En effet, en désignant par p_0 la pression à l'intérieur de l'aile où la vitesse est nulle, on a

$$p_0 = p + \frac{\rho}{2} v^2,$$

d'où

$$p_0 - p = \frac{\rho}{2} v^2 = |\Pi|.$$

2. Résultante aérodynamique. — En faisant la sommation des efforts $\mathbf{f}d\tau$ appliqués sur chaque élément du volume tourbillonnaire, on obtient l'effort total exercé sur le fluide. Cet effort est égal et de signe contraire à la réaction du fluide sur l'aile ; nous l'appellerons *résultante aérodynamique*. Soit $\mathbf{R}$ cette résultante, on aura :

$$\mathbf{R} = - \int_{\tau} \mathbf{f} d\tau = - \rho \int_{\tau} \boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{u} d\tau,$$

l'intégrale étant étendue dans tout le volume tourbillonnaire τ . En désignant par Ω_a les *tourbillons liés* à l'aile et en remarquant que l'intégrale concernant les *tourbillons libres* Ω_e est identiquement nulle, on pourra écrire :

$$(37) \quad \mathbf{R} = - \rho \int_{\tau_a} \Omega_a \wedge \mathbf{u} d\tau,$$

où le volume τ_a représentant l'espace occupé par les *tourbillons liés*.

La vitesse $\mathbf{u}$ se compose de la vitesse constante $\mathbf{V}$, et de la vitesse $\mathbf{w}$ due au système de tourbillons libres et liés. En remplaçant $\mathbf{u}$ par la somme de ces deux vitesses ($\mathbf{u} = \mathbf{V} + \mathbf{w}$) et $\mathbf{w}$ à son tour par sa valeur tirée de la relation (25) :

$$(38) \quad \mathbf{w} = \frac{1}{4\pi} \int_{\tau_a} \frac{\mathbf{r} \wedge \Omega_a}{r^3} d\tau + \frac{1}{4\pi} \int_{\tau_e} \frac{\mathbf{r} \wedge \Omega_e}{r^3} d\tau,$$

(1) D'après Prandtl : *freie Wirbel* et *gebundene Wirbel*.

l'expression (37) devient finalement :

$$(39) \quad R = \rho V \wedge \int_{\tau_a} \Omega_a d\tau - \frac{\rho}{4\pi} \int_{\tau_a} \Omega_a d\tau \wedge \int_{\tau_a} \frac{\mathbf{r} \wedge \Omega_a}{r^3} d\tau - \frac{\rho}{4\pi} \int_{\tau_a} \Omega_a d\tau \wedge \int_{\tau_e} \frac{\mathbf{r} \wedge \Omega_e}{r^3} d\tau.$$

Telle est l'expression générale de la résultante aérodynamique. Si les tourbillons liés (Ω_a) sont tous parallèles, le deuxième terme du second membre est nul. Soit en effet, deux tubes de tourbillons parallèles d'intensités respectivement $d\Gamma_1 = \Omega_1 d\tau_1$ et $d\Gamma_2 = \Omega_2 d\tau_2$.

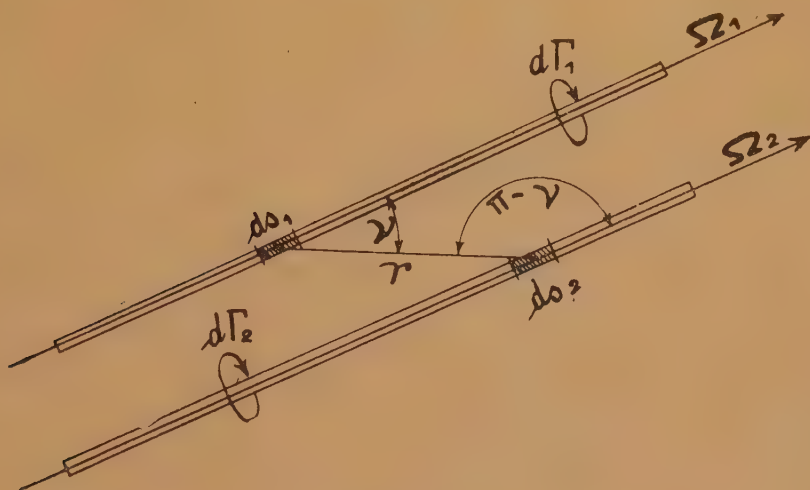


Fig. 6.

Considérons deux éléments ds_1 et ds_2 , et désignons v_{21} et v_{12} les vitesses dues à chacun de ces éléments au droit de l'autre, on aura (fig. 6) :

$$v_{21} = \frac{d\Gamma_1 \times ds_1}{r^2} \sin \nu,$$

$$v_{12} = - \frac{d\Gamma_2 \times ds_2}{r^2} \sin \nu,$$

et les efforts respectifs :

$$f_1 \times ds_1 \times ds_2 = d\Gamma_1 \times ds_1 \times v_{12} = - \frac{d\Gamma_1 \times d\Gamma_2 \times ds_1 \times ds_2}{r^2} \sin \nu$$

$$f_2 \times ds_2 \times ds_1 = d\Gamma_2 \times ds_2 \times v_{21} = + \frac{d\Gamma_1 \times d\Gamma_2 \times ds_1 \times ds_2}{r^2} \sin \nu$$

Il en résulte que les efforts élémentaires sont deux à deux égaux et de signes contraires et par conséquent l'effort total est nul.

Dans la théorie des ailes sustentatrices, on fait généralement cette hypothèse qui simplifie l'expression (39), dont les deux termes restants :

$$(40) \quad P = \rho V \wedge \int_{\tau_a} \Omega_a d\tau \quad \text{et} \quad T = - \frac{\rho}{4\pi} \int_{\tau_a} \Omega_a d\tau \wedge \int_{\tau_e} \frac{\mathbf{r} \wedge \Omega_e}{r^3} d\tau$$

représentent respectivement la *portance* (*sustentation*) et la *trainée*. La première est perpendiculaire à la vitesse ; quant à la seconde, on peut remarquer que les vitesses *induites*, dues à la nappe des tourbillons libres, sont toutes perpendiculaires à cette nappe, qui est à son tour sensiblement parallèle au courant général. Il en résulte que la trainée est dirigée suivant la vitesse V et s'appelle pour cela *résistance à l'avancement*.

L'ensemble du problème qui consiste à déterminer la distribution des tourbillons Ω_a et Ω_o , pour en déduire après P et T constitue la « théorie de Prandtl (1) ».

Dans le cas d'une aile cylindrique infiniment grande les tourbillons libres Ω_o sont nuls ; cela entraîne $T = 0$ et, en prenant une longueur d'aile égale à l'unité, on trouve

$$P = \rho V \wedge \int_{\tau_a} \Omega_a d\tau = \rho V \wedge \int_s \Omega_a \times \delta \times ds = \rho V \wedge \int_s n \wedge v ds,$$

d'où, en désignant par Γ la circulation autour de l'aile, on obtient le théorème de Kutta Joukowski :

$$(41) \quad |P| = \rho \cdot V \times \Gamma.$$

3. Distribution de la circulation dans la nappe des tourbillons libres. — Soit une aile A rapportée à un système d'axe, dont ox est dirigé suivant

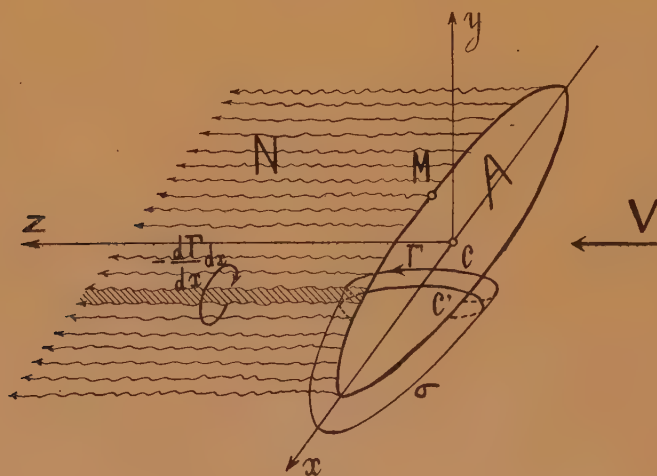


Fig. 7.

l'envergure générale, oy suivant la verticale et oz suivant la direction générale du courant (fig. 7). Nous avons admis implicitement que l'aile

(1) Prandtl « Tragflügeltheorie ». I. Mitteilung, 1918, page 451 et II Mitteilung, 1919, page 107, de Nachrichten der K. Gesell. der Wissenschaft. zu Gött. Math. Phys. Klasse.

est équivalente à un système de tourbillons liés à la paroi et un autre de tourbillons libres, dirigés sensiblement suivant le courant général.

En un point M, qui fait partie à la fois du système portant et de la nappe libre, la divergence du tourbillon étant nulle, on aura :

$$(42) \quad \text{div } \Omega = \text{div } \Omega_a + \text{div } \Omega_e = 0.$$

A partir de cette relation, il est facile de déterminer l'intensité d'une *lanière de tourbillons* qui se détache en un point quelconque du bord de sortie. Nous préférons raisonner pourtant de la manière suivante :

Soit un contour C entourant l'aile et compris dans un plan normal à x et une surface σ s'appuyant sur ce contour et enveloppant l'aile du côté positif.

A une distance dx , menons σ' sur un autre contour C'.

La surface comprise entre C et C' coupe une *lanière de tourbillons libres* dont la circulation est $\Omega_e \times \delta \times dx$, où δ représente l'épaisseur de la lanière. Soit Γ et $\Gamma + d\Gamma$ les circulations autour des contours C et C', il est facile de voir qu'on peut écrire, en désignant par t le vecteur unitaire tangent à C ou C' :

$$-d\Gamma = \int_C u \times t ds - \int_{C'} u \times t ds = \int_{\sigma} \Omega_e \times n d\sigma - \left(\int_{\sigma} \Omega_e \times n d\sigma - \Omega_e \times \delta \times dx \right)$$

d'où

$$(43) \quad \Omega_e \times \delta \times dx = - \frac{d\Gamma}{dx} dx.$$

Et par conséquent : *l'intensité des tourbillons qui sortent en un point de l'envergure est égale et de signe contraire à la variation de la circulation en ce point.*

CHAPITRE II

MOUVEMENT PLAN PARALLÈLE

(Aile d'envergure infinie).

On dit d'un mouvement qu'il est *plan parallèle*, quand les vitesses sont toutes parallèles à un plan, qu'on appelle *plan directeur*. Les caractéristiques du mouvement sont alors fonctions des deux variables indépendantes x et y et du temps.

§ 1. — Introduction des fonctions d'une variable complexe.

1. Potentiel et vitesse complexes. — Soit $f(z)$ une fonction de la variable complexe $z = x + iy$ où i représente le symbole $\sqrt{-1}$. En séparant la fonction $f(z)$ en une partie réelle et une autre imaginaire, on peut écrire :

$$(44) \quad f(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y)$$

et

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{df}{dz} \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{df}{dz} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + i \frac{\partial \psi}{\partial x}; \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{df}{dz} \frac{\partial z}{\partial y} = i \frac{df}{dz} = \frac{\partial \varphi}{\partial y} + i \frac{\partial \psi}{\partial y}, \end{aligned}$$

d'où il résulte immédiatement :

$$(45) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = - \frac{\partial \psi}{\partial x}.$$

Ce sont les conditions caractéristiques pour que deux fonctions φ et ψ soient, l'une, la partie réelle, l'autre, le coefficient de l'unité imaginaire d'une fonction de la variable complexe $z = x + iy$. Ces conditions s'appellent, d'après Cauchy, les *conditions de monogénéité*.

De l'expression (45), on en déduit deux autres, soit :

$$(46) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0$$

et

$$(47) \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = \Delta \varphi = 0, \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \Delta \psi = 0,$$

dont la première exprime que les deux fonctions φ et ψ représentent

un réseau de *courbes orthogonales* ; et la seconde que ces mêmes fonctions satisfont à la loi de Laplace et sont, par conséquent, *harmoniques*. Si réciproquement on a deux fonctions harmoniques φ et ψ , pour qu'on puisse écrire $\varphi + i\psi = f(z)$, il est nécessaire que les conditions (43) soient satisfaites. Les deux fonctions harmoniques sont dites alors *associées*.

Considérons maintenant un mouvement régi par un potentiel des vitesses φ (mouvement irrotationnel. Les composantes u et v de la vitesse, suivant les directions ox , oy , seront

$$(48) \quad u = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial \varphi}{\partial y}.$$

En appliquant l'équation de continuité, on trouve

$$(49) \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = \Delta \varphi = 0,$$

d'où il résulte que φ est une fonction harmonique. D'autre part, l'équation des lignes de courant

$$(50) \quad \frac{dx}{u} = \frac{dy}{v}, \quad -vdx + udy = 0,$$

est une différentielle exacte, car on a, d'après l'équation de continuité,

$$-\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x},$$

la relation :

$$-vdx + udy = \frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy = d\psi = 0.$$

Il en résulte :

$$(45) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \psi}{\partial y} = u = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \\ -\frac{\partial \psi}{\partial x} = v = \frac{\partial \varphi}{\partial y} \end{array} \right. \text{ et } \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial x} = 0,$$

et par conséquent φ , qui représente le potentiel des vitesses, et ψ , les lignes de courant (ψ est la *fonction de courant*), satisfont aux conditions (45) et on peut écrire

$$(44) \quad \varphi + i\psi = f(z).$$

La fonction $f(z) = \varphi + i\psi$ s'appelle le *potentiel complexe* et sa dérivée par rapport à z , la *vitesse complexe* :

$$(51) \quad w = \frac{df}{dz} = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + i \frac{\partial \psi}{\partial x} = u - iv.$$

Réciproquement, toute fonction $f(z)$ de la variable complexe $z = x + iy$ représente un mouvement plan irrotationnel ; la partie réelle de la fonction représente le potentiel et le coefficient de la partie imaginaire les lignes de courant, ou la *fonction de courant*.

2. Représentation conforme. — Soit

$$(52) \quad x = x(\xi, \eta) \quad \text{et} \quad y = y(\xi, \eta),$$

deux fonctions uniformes et régulières avec leurs dérivées premières, et supposons que leur *Jacobien* n'est pas nul :

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Considérons les deux plans xoy et $\xi\omega\eta$ (fig. 8) ; à un point P du premier correspond, d'après (52), un autre point Π du second et réciproque-

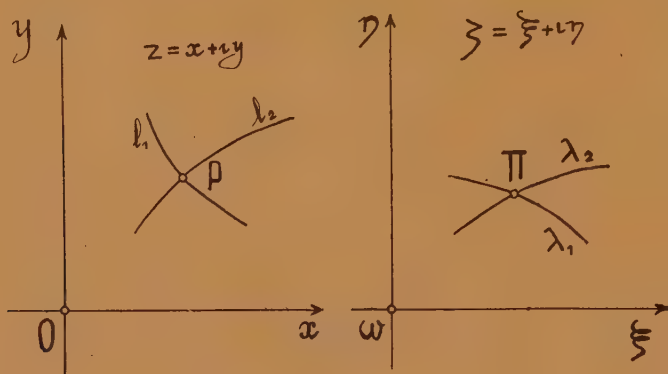


Fig. 8.

ment. De même, à une courbe du plan xoy correspond une seule courbe dans le plan $\xi\omega\eta$; et ainsi de suite pour deux aires situées respectivement dans les deux plans. On dit que les fonctions (52) représentent une *transformation* du plan $\xi\omega\eta$ sur le plan xoy . Soient l_1, l_2 deux lignes issues du point P et λ_1, λ_2 les lignes correspondantes au point Π .

L'angle d'intersection de l_1 et l_2 n'est pas en général égal à celui de λ_1 et λ_2 . Pour que les deux angles soient égaux, les expressions (52) doivent satisfaire à certaines conditions, qui découlent précisément de l'égalité de ces angles. En effet, cela équivaut à dire qu'un triangle infinitésimal du plan xoy est semblable au triangle correspondant dans le plan $\xi\omega\eta$. En désignant par ds et $d\sigma$ deux côtés correspondants, on doit avoir :

$$(53) \quad \left(\frac{ds}{d\sigma} \right)^2 = \mu^2, \quad ds^2 = \mu^2 \cdot d\sigma^2.$$

En mettant

$$dx = \frac{\partial x}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial x}{\partial \eta} d\eta \quad \text{et} \quad dy = \frac{\partial y}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial y}{\partial \eta} d\eta$$

la relation (53) devient :

$$(53') \quad \left[\left(\frac{\partial x}{\partial \xi} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \xi} \right)^2 \right] d\xi^2 + \left[\left(\frac{\partial x}{\partial \eta} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \eta} \right)^2 \right] d\eta^2 \\ + 2 \left[\frac{\partial x}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial y}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial y}{\partial \eta} \right] d\xi \cdot d\eta = \mu^2 (d\xi^2 + d\eta^2).$$

Cette expression doit être vérifiée quels qu'ils soient $d\xi$ et $d\eta$; on en déduit de ce fait :

$$(54) \quad \frac{\partial x}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial y}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial y}{\partial \eta} = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{\frac{\partial x}{\partial \xi}}{\frac{\partial y}{\partial \xi}} = - \frac{\frac{\partial x}{\partial \eta}}{\frac{\partial y}{\partial \eta}},$$

$$(55) \quad \left(\frac{\partial x}{\partial \xi} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \xi} \right)^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial \eta} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \eta} \right)^2,$$

d'où il en résulte :

$$(56) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial x}{\partial \xi} = \frac{\partial y}{\partial \eta} & \text{et} \quad \frac{\partial x}{\partial \eta} = - \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \text{ou} \quad \frac{\partial x}{\partial \xi} = - \frac{\partial y}{\partial \eta} & \text{et} \quad \frac{\partial x}{\partial \eta} = \frac{\partial y}{\partial \xi} \end{array} \right.$$

Les conditions (56) expriment que $x + iy = z$ est une fonction de la variable complexe $\zeta = \xi + i\eta$ ou que $x + i(-y) = \bar{z}$ est également une fonction de ζ . Ainsi donc, pour que la *transformation* définie par les expressions (52) conserve les angles, et dans ce cas elle s'appelle *transformation conforme*, il faut et il suffit que $z = x + iy$ soit une fonction de la variable $\zeta = \xi + i\eta$.

Et réciproquement, toute *fonction analytique*

$$(57) \quad z = z(\zeta),$$

représente une *transformation conforme*, qui fait correspondre point par point l'aire du plan $\zeta(\xi\omega\eta)$ sur l'aire du plan $z(xoy)$.

En particulier, un contour déterminé du plan ζ se *transforme* par la relation (57) en un autre contour bien déterminé sur le plan z .

Inversement, considérons deux contours C et K dans les plans z et ζ et supposons que le contour K soit une circonférence. D'après un théorème de Riemann, il y a toujours une fonction analytique $z = z(\zeta)$ qui fait la *représentation conforme* de l'aire intérieure limitée par le contour C sur l'aire intérieure limitée par la circonférence K. Cette fonction est bien déterminée si l'on astreint 3 points du contour C à correspondre à trois points donnés sur le contour circulaire; ou bien un point sur C et un point à l'intérieur à correspondre à un point donné sur la circonférence et à un autre à l'intérieur.

Cette proposition établie pour les aires intérieures des contours C et K est valable aussi pour les aires extérieures, car on peut utiliser une *inversion* et les aires extérieures aux contours C et K se transforment, par cette inversion, en des aires intérieures à d'autres contours $\bar{C}_1$ et $\bar{K}_1$.

Supposons que nous avons dans le plan z un mouvement irrotationnel, nous avons vu qu'il est toujours caractérisé par un *potentiel complexe*, soit $f(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y)$.

Remplaçons z par $z = z(\zeta)$, le potentiel devient :

$$(58) \quad F(\zeta) = f[z(\zeta)] = \varphi[x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)] + i\psi[x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)] \\ = \Phi(\xi, \eta) + i\Psi(\xi, \eta).$$

Et on voit que la fonction $F(\zeta)$ représente un mouvement dans le plan ζ tel que les lignes $\Phi(\xi, \eta)$ et $\Psi(\xi, \eta)$ soient les *transformées* des lignes $\varphi(x, y)$ et $\psi(x, y)$ du plan z . Les *vitesse complexes* dans les deux mouvements sont liées par la relation :

$$(59) \quad \frac{df}{dz} = \frac{dF}{d\zeta} \cdot \frac{d\zeta}{dz} \quad \left(w = W \cdot \frac{d\zeta}{dz} \right).$$

Ainsi par conséquent, si on connaît le mouvement dans le plan ζ et la fonction $z = z(\zeta)$, qui transforme conformément le plan ζ en un plan z , on peut déterminer le mouvement dans ce dernier plan.

En aérodynamique le problème consiste à déterminer le potentiel des vitesses du mouvement de l'air compatible avec les conditions à la paroi des solides immergés et à celles aux *frontières*. Dans nombre de cas, la solution comporte une *représentation conforme* du mouvement autour du contour du solide sur l'aire extérieure d'une circonférence. Pour cela, il faut chercher la fonction $z = z(\zeta)$ de la transformation des deux domaines extérieurs au contour et à la circonférence, et cela est généralement très difficile. La solution est simple quand on connaît cette fonction, dont nous allons analyser plus bas la forme générale, pour en déduire après des *formes caractéristiques* concernant les contours intéressant l'aérodynamique.

3. Forme générale de la fonction $z = z(\zeta)$. — Soit C et K les deux contours dans les plans z et ζ (fig. 9) ; effectuons une *inversion* pour chacun, soit :

$$(60) \quad z_1 = \frac{a}{z} \quad \text{et} \quad \zeta_1 = \frac{\alpha}{\zeta - \mu} = \frac{\alpha}{\zeta'},$$

où μ représente le centre du cercle dans le plan ζ . Nous avons supposé que les origines des axes sont à l'intérieur des contours. Les expressions (60) transforment C et K dans deux autres, C_1 dans le plan z_1 et la circonférence K_1 dans le plan ζ_1 ; les aires extérieures à C et K sont représentées sur les aires intérieures de C_1 et K_1 . D'après le théorème de Riemann il existe toujours une fonction $z_1 = z_1(\zeta_1)$ qui transforme l'aire intérieure de C_1 sur celle intérieure de K_1 . Cette fonction s'écrit, d'après M. Bieberbach (1) :

(1) L. Bieberbach : *Zur Theorie und Praxis der Konformen Abbildung*. Rendiconti di Palermo, tome 38, 1914 et *Ueber die Konforme Kreisabbildung nahezu Kreisformigen Bereiche*, Sitzungsber. der Pr. Akad. d. W., 1924, page 181.

$$(61) \quad z_1 = c_1 \zeta_1 + c_2 \zeta_1^2 + \dots c_n \zeta_1^n + \dots$$

d'où

$$z = \frac{a}{z_1} = b_{-1} \frac{1}{\zeta_1} + b_0 + b_1 \zeta_1 + b_2 \zeta_1^2 + \dots$$

et finalement, en remplaçant ζ_1 et en développant, on obtient :

$$(62) \quad z = q_{-1} \zeta + q_0 + \frac{q_1}{\zeta} + \frac{q_2}{\zeta^2} + \dots \frac{q_n}{\zeta^n} + \dots$$

Nous avons dit au début que cette fonction est parfaitement déterminée

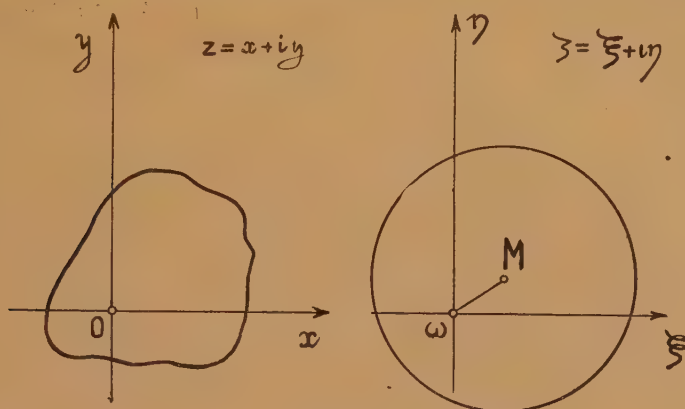


Fig. 9.

si l'on astreint un point du contour C et un autre à l'extérieur à correspondre à deux points donnés sur la circonférence et à l'extérieur. Ces conditions sont automatiquement réalisées si on admet que les plans, z et ζ , se *superposent* à l'infini :

$$\left(\frac{dz}{d\zeta} \right)_{\zeta \rightarrow \infty} = 1,$$

dans quel cas, à une translation près, on peut écrire :

$$(63) \quad z = \zeta + \frac{q_1}{\zeta} + \frac{q_2}{\zeta^2} + \dots \frac{q_n}{\zeta^n} + \dots$$

Par un raisonnement analogue, on serait inversement arrivé à une fonction $\zeta = \zeta(z)$ de même forme que (63) :

$$(63') \quad \zeta = z + \frac{c_1}{z} + \frac{c_2}{z^2} + \dots \frac{c_n}{z^n} + \dots$$

La fonction $z = z(\zeta)$ [respectivement $\zeta = \zeta(z)$] est *holomorphe* et admet le point à l'infini pour *pôle simple*. Il en résulte que $\frac{dz}{d\zeta}$

(respectivement $\frac{d\zeta}{dz}$) ne s'annule en aucun point en dehors du cercle ; et que, en un point z_0 (correspondant à ζ_0), pour un module de $z - z_0$ suffisamment faible, on peut obtenir un développement en série convergente :

$$(64) \quad \begin{cases} z - z_0 = \alpha_1(\zeta - \zeta_0) + \alpha_2(\zeta - \zeta_0)^2 + \dots \alpha_n(\zeta - \zeta_0)^n \dots \\ \zeta - \zeta_0 = a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \dots a_n(z - z_0)^n \dots \end{cases}$$

Si le contour C est un arc analytique régulier (1), c'est-à-dire si le contour ne possède pas d'angles vifs, $z = z(\zeta)$ peut être *prolongée analytiquement* au delà du cercle K et dans ce cas les développements (64) sont valables même sur le contour du cercle et $\frac{dz}{d\zeta}$ ne s'annule et ne devient infinie en aucun point *en dehors et sur le cercle*.

Il n'en est pas de même dans le cas d'un angle vif. Soit z_0 le sommet de cet angle sur le contour C et ζ_0 le point correspondant sur le cercle

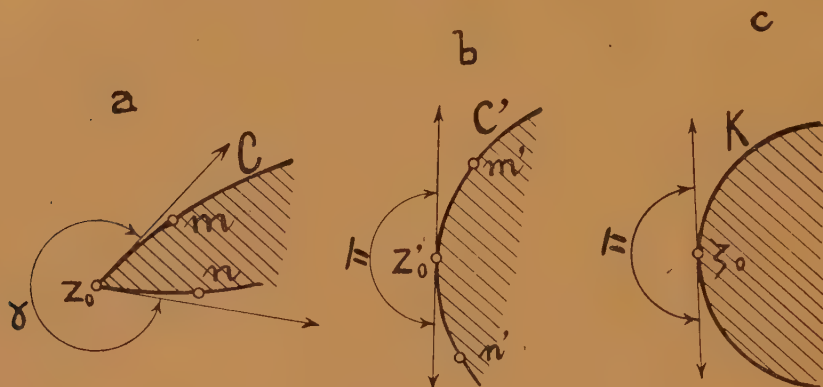


Fig. 10.

(fig. 10). En ces points les angles ne se correspondent pas (α est différent de π) et la transformation n'est plus conforme.

Effectuons une transformation intermédiaire du plan z en un autre z' , définie par la relation

$$(65) \quad z - z_0 = (z' - z'_0)^{\frac{\alpha}{\pi}}, \quad (re^{i\theta} = r'e^{i\frac{\alpha}{\pi}\theta'}),$$

qui fait correspondre l'aire d'un cercle de centre z_0 dans le plan z à l'aire d'un cercle correspondant de centre z'_0 dans le plan z' . Cette transformation est conforme en tous les points correspondants de ces deux cercles sauf aux points $z = z_0$, $z' = z'_0$. Autour de ces deux points, quand l'argument θ' varie de 0 à π , l'argument θ varie de 0 à α . Si nous suivons les arcs réguliers mz_0 et z_0n , nous constatons que les arcs correspondants $m'z'_0$ et z'_0n' sont réguliers aussi, même au point z'_0 , car nous avons vu plus haut que l'angle des deux arcs $m'z'_0$ et $n'z'_0$ est π . Revenons au plan ζ ; nous remarquons qu'autour du point ζ_0 le contour K correspond à un arc régulier C' autour du point z'_0 . Il s'ensuit que la transformation est uniforme autour de ces deux points et le développement (64) est valable :

$$z - z_0 = \alpha'_1(\zeta - \zeta_0) + \alpha'_2(\zeta - \zeta_0)^2 + \dots, \alpha'_n(\zeta - \zeta_0)^n + \dots$$

(1) D'après M. E. Picard, *Traité d'Analyse*, t. II, page 69, 1893.

et par conséquent la dérivée $\frac{dz'}{d\zeta}$ est finie et différente de zéro au point ζ_0 .

Comme on a d'autre part, d'après (65) :

$$(66) \quad \frac{dz}{d\zeta} = \frac{dz}{dz'} \cdot \frac{dz'}{d\zeta} = \frac{\alpha}{\pi} (z' - z_0)^{\frac{\alpha}{\pi} - 1} \cdot \frac{dz'}{d\zeta},$$

on en déduit facilement que $\frac{dz}{d\zeta}$ est zéro pour $\alpha > \pi$ et infinie pour $\alpha < \pi$.

Inversement, supposons que la fonction $z = z(\zeta)$ se met sous la forme :

$$(67) \quad z - z_0 = \left(1 - \frac{\zeta_0}{\zeta}\right)^m \left[\zeta + \beta_0 + \frac{\beta_1}{\zeta} + \dots + \frac{\beta_n}{\zeta^n} + \dots \right].$$

Pour un module suffisamment faible de $\zeta - \zeta_0$, on peut développer cette expression en une série convergente ; si on ne retient que le premier membre de la série, on peut écrire :

$$(68) \quad z - z_0 = (\zeta - \zeta_0)^m \left[\zeta_0^{-m} + \frac{\beta_0}{\zeta_0^m} + \frac{\beta_1}{\zeta_0^{m+1}} + \dots + \frac{\beta_n}{\zeta_0^{m+n}} + \dots \right] \\ = F(\zeta_0)(\zeta - \zeta_0)^m,$$

et

$$(68') \quad re^{i\theta} = F(\zeta_0) \cdot \rho^m e^{im\varphi} = m\varphi, \quad \alpha = m\pi.$$

D'où l'on voit que le point z_0 du contour C correspond à un angle vif extérieur égal à $\alpha = m\pi$.

REMARQUE. — Nous avons établi que $\frac{dz}{d\zeta}$ ne devient nulle en aucun point en dehors et sur le cercle, sauf en un nombre fini de points sur celui-ci. Il s'ensuit que les autres points qui annulent

$$(66') \quad \frac{dz}{d\zeta} = \left(1 - \frac{\lambda_1}{\zeta}\right) \left(1 - \frac{\lambda_2}{\zeta}\right) \dots \left(1 - \frac{\lambda_j}{\zeta}\right) = 0,$$

se trouvent tous à l'intérieur du cercle. Par conséquent, pour que $z = z(\zeta)$ représente la transformation d'un contour fermé sans points doubles sur celui du cercle, elle doit satisfaire à cette condition. Comme d'autre part, $\frac{dz}{d\zeta}$ ne contient pas un terme en $\frac{1}{\zeta}$, qui donnerait par intégration un terme logarithmique pour z , on en conclut que $\sum \lambda_j = 0$.

§ 2. — Mouvement général autour d'un contour.

Le mouvement le plus général d'un solide peut être décomposé en un mouvement de translation et un autre de rotation. Considérons un corps cylindrique de longueur infiniment grande et supposons qu'il se déplace normalement à la direction des génératrices. Le mouvement de l'air est identique dans tous les plans perpendiculaires à cette direction ; pour

l'étudier, il suffit de le déterminer autour du contour de la section droite du cylindre indéfini. Soit xoy un système d'axes lié au contour et suppo-

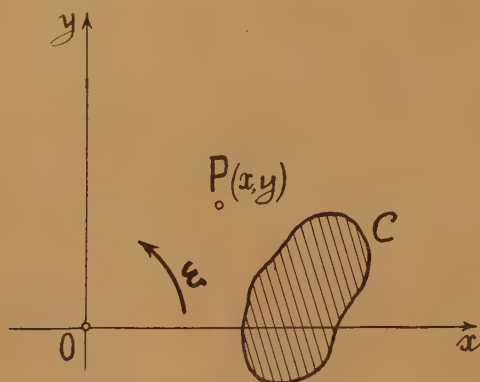


Fig. 11.

sons que le mouvement de ce dernier est caractérisé par une translation de l'origine o et par une rotation autour de ce point (fig. 11).

1. Relation fondamentale. — Désignons par u_0 et v_0 les composantes de la vitesse de translation de l'origine suivant les axes ox et oy et par ω la vitesse de rotation autour de celle-ci ; supposons que tout le fluide soit animé d'une vitesse de translation de composantes $-u_0$ et $-v_0$. L'origine est alors immobile et le mouvement relatif par rapport à celle-ci est régi par un potentiel des vitesses, dont les composantes à l'infini sont $-u_0$ et $-v_0$. Pour avoir le mouvement relatif par rapport aux axes mêmes, il faut ajouter, aux vitesses dérivées de ce potentiel, les vitesses d'entraînement :

$$(69) \quad u_e = \omega y, \quad v_e = -\omega x,$$

et les vitesses relatives deviennent alors :

$$(70) \quad u_r = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \omega y, \quad v_r = \frac{\partial \varphi}{\partial y} - \omega x,$$

d'où

$$(70') \quad u_r - iv_r = \frac{\partial \varphi}{\partial x} - i \frac{\partial \varphi}{\partial y} + i\omega(x - iy) = \frac{df}{dz} + i\omega \bar{z}.$$

Dans ce mouvement relatif, tout se passe comme si les axes et le contour étaient immobiles et l'air était animé d'une part de la vitesse de translation $(-u_0, -v_0)$, d'autre part de la vitesse de rotation ω autour de l'origine. L'équation des lignes de courant est identique à l'expression (50) :

$$d\psi_r = u_r dy - v_r dx = 0,$$

qui se vérifie sur le contour, celui-ci étant une ligne de courant dans ce mouvement relatif. En remarquant maintenant que :

$$u_r dy - v_r dx = \text{partie imaginaire de } (u_r - iv_r)(dx + idy),$$

et en désignant par $\bar{z} = x - iy$ la quantité conjuguée de $z = x + iy$, on peut écrire finalement :

$$(71) \quad u_r dy - v_r dx = p \cdot \text{im.} \left(\frac{df}{dz} + i\omega \bar{z} \right) dz.$$

Cette expression est identiquement nulle sur le contour et elle constitue la condition à la paroi du potentiel $f(z)$, qui caractérise le mouvement. De sorte que la fonction $f(z)$ doit vérifier la *relation fondamentale* :

$$(71') \quad p \cdot \text{im.} (df + i\omega \bar{z} dz)_C \equiv 0.$$

Pour résoudre cette équation, nous serons obligé de *représenter* le domaine extérieur au contour C dans le plan z sur le domaine extérieur au cercle K dans le plan ζ . Si $z = z(\zeta)$ représente la transformation de ces deux domaines, le potentiel $F(\zeta) = f[z(\zeta)]$ doit satisfaire sur la circonférence K une relation analogue à (71') :

$$(71'') \quad p \cdot \text{im} \left[dF + i\omega \bar{z}(\zeta) \frac{dz}{d\zeta} d\zeta \right]_K \equiv 0.$$

On remarque, d'après cette expression, que si la rotation est nulle ($\omega = 0$), la détermination de $F(z)$ est indépendante de la fonction de transformation $z = z(\zeta)$. Il en résulte que, *dans le déplacement de translation d'un contour quelconqué, le mouvement relatif du fluide par rapport à ce contour correspond toujours au même mouvement autour d'un contour circulaire; et que ce dernier représente le mouvement réel autour du cercle lui-même.*

2. Equation de la pression. — Considérons un système d'axes fixes $o_1 x_1 y_1$ et soient $\varphi_1(x_1, y_1, t)$ et $\varphi'(x, y, t)$ le potentiel du *mouvement absolu* par rapport aux axes fixes et aux axes mobiles (fig. 12). Si nous désignons par u' et v' les vitesses absolues par rapport aux axes mobiles, l'équation de Lagrange pour la pression s'écrira :

$$(7) \quad p + \frac{\rho}{2}(u'^2 + v'^2) + \rho \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} = h(t).$$

Par transformation de coordonnées, on peut mettre

$$\varphi_1(x_1, y_1, t) \equiv \varphi'(x, y, t)$$

et par conséquent :

$$(72) \quad \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} \frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_1} \frac{dy_1}{dt} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} = \frac{\partial \varphi'}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial \varphi'}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial \varphi'}{\partial t}.$$

En remarquant que $\frac{dx}{dt}$ et $\frac{dy}{dt}$ représentent les composantes u_r et v_r de la vitesse relative suivant les axes mobiles, on déduit de (72) :

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial t} = \frac{\partial \varphi'}{\partial t} + u'(u_r - u') + v'(v_r - v'),$$

et en remplaçant cette expression de $\frac{\partial \varphi_1}{\partial t}$ dans (7), on obtient :

$$p + \frac{\rho}{2}(u_r^2 + v_r^2) - \frac{\rho}{2}\{(u_r - u')^2 + (v_r - v')^2\} + \rho \frac{d\varphi'}{dt} = h(t).$$

Les différences $(u' - u_r)$ et $(v' - v_r)$ représentent les composantes de la vitesse d'entraînement :

$$(73) \quad \begin{cases} u_e = u' - u_r = u_0 - \omega y \\ v_e = v' - v_r = v_0 + \omega x, \end{cases}$$

où u_0 et v_0 sont les vitesses de translation de l'origine des axes mobiles.

D'autre part, si nous désignons comme précédemment par u et v les composantes de la vitesse relative par rapport à l'origine immobile, on peut mettre :

$$u = u' + u_0 = \frac{\partial \varphi'}{\partial x} + u_0, \quad v = v' + v_0 = \frac{\partial \varphi'}{\partial y} + v_0,$$

d'où, en appelant φ le potentiel défini précédemment, on tire

$$(74) \quad \left\{ \begin{array}{l} \varphi(x, y, t) = \varphi'(x, y, t) + u_0 x + v_0 y \\ \text{et} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{\partial \varphi'}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t} (u_0 x + v_0 y). \end{array} \right.$$

Si on remplace dans l'équation de la pression les termes explicités par les expressions (73) et (74) et en remarquant que $\frac{\rho}{2}(u_0^2 + v_0^2)$, qui ne

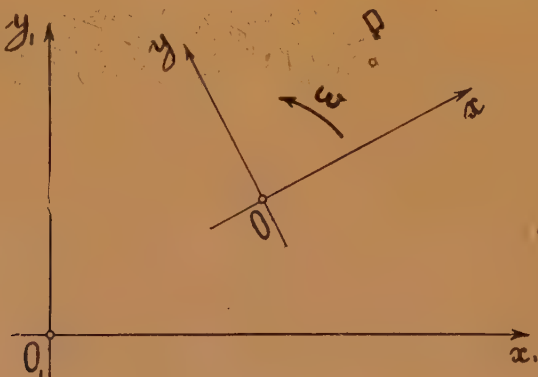


Fig. 12.

dépend que du temps, peut entrer dans la valeur de la constante $h(t)$, on peut obtenir finalement :

$$(75) \quad p + \frac{\rho}{2}(u_r^2 + v_r^2) + \rho \left\{ \left(\frac{du_0}{dt} - \omega v_0 \right) x + \left(\frac{dv_0}{dt} + \omega u_0 \right) y \right\} + \rho \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{\rho}{2} \omega^2 (x^2 + y^2) = H(t).$$

Nous allons utiliser cette équation pour déterminer la *résultante aérodynamique* et le *moment résultant*.

3. Résultante aérodynamique. En désignant par n le vecteur unité normal

à un élément ds du contour et dirigé vers l'intérieur de celui-ci (fig. 13), et par p la pression qui règne autour de cet élément, l'effort élémentaire sur une longueur égale à l'unité, subi par celui-ci de la part du fluide sera $npds$, dont les composantes selon Ox et Oy sont :

$$\frac{dx}{dn} pds = -pdy, \quad \frac{dy}{dn} pds = pdx.$$

Appelons $R = R_x - iR_y$ la résultante générale et convenons de sur-

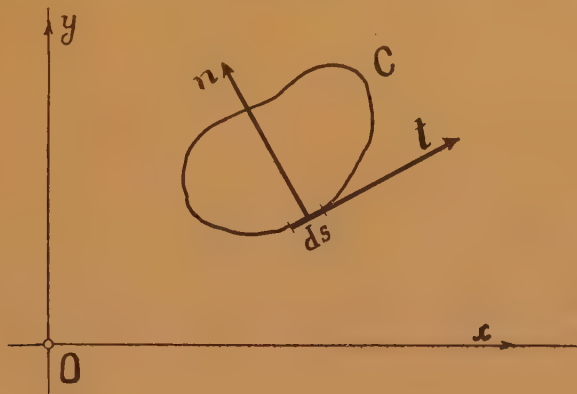


Fig. 13.

ligner chaque fois que nous voulons désigner la quantité conjuguée d'une expression, soit par exemple $\bar{q} = a - ib$ conjuguée de $q = a + ib$. On pourra écrire

$$dR_x = -pdy, \quad dR_y = pdx \quad \text{et} \quad dR = -ip(dx - idy) = -ipd\bar{z},$$

d'où

$$R = -i \int_C p d\bar{z} = -i \int_C H(t) d\bar{z} + \frac{i\rho}{2} \int_C (u_r^2 + v_r^2) d\bar{z} + i\rho \int_C (ax + by) d\bar{z} + i\rho \int_C \frac{\partial \varphi}{\partial t} d\bar{z} - \frac{i\rho}{2} \omega^2 \int_C (z\bar{z}) d\bar{z}.$$

La première intégrale est nulle, car $\bar{z}$ prend sur le contour la même valeur au départ et à l'arrivée.

La deuxième se transforme comme il suit. De (70') on tire :

$$u_r^2 + v_r^2 = (u_r - iv_r)(u_r + iv_r) = \left(\frac{df}{dz} + i\omega\bar{z} \right) \left(\frac{d\bar{f}}{d\bar{z}} - i\omega z \right).$$

En observant plus loin que,

$$u_r dy - v_r dx,$$

est identiquement nulle sur le contour, car celui-ci est une ligne de courant dans le mouvement relatif, on a

$$(u_r + iv_r)(dx - idy) = (u_r - iv_r)(dx + idy)$$

sur le contour. Il en résulte,

$$\left(\frac{d\bar{f}}{d\bar{z}} - i\omega z \right) d\bar{z} = \left(\frac{df}{dz} + i\omega\bar{z} \right) dz,$$

et par conséquent la deuxième intégrale devient :

$$\begin{aligned} \frac{i\rho}{2} \int_C (u_r^2 + v_r^2) d\bar{z} &= \frac{i\rho}{2} \int_C \left(\frac{df}{dz} + i\omega\bar{z} \right)^2 dz \\ &= \frac{i\rho}{2} \int_C \left(\frac{df}{dz} \right)^2 dz - \rho\omega \int_C \bar{z} \frac{df}{dz} dz - \frac{i\rho}{2} \omega^2 \int_C (\bar{z})^2 dz \end{aligned}$$

La troisième intégrale, où a et b représentent respectivement $\frac{du_0}{dt} - \omega v_0$ et $\frac{dv_0}{dt} + \omega u_0$, a une signification simple. En effet, en désignant par A l'aire du contour, on a

$$\begin{aligned} \int_C (ax + by)(dx - idy) &= a \int_C x dx + b \int_C y dx - ia \int_C x dy - ib \int_C y dy \\ &= -Ab - iAa = -A(b + ia), \end{aligned}$$

d'où

$$i\rho \int_C (ax + by) d\bar{z} = \rho A(a - ib).$$

D'une manière analogue, en désignant par x_g et y_g les coordonnées du centre de gravité de l'aire A , on trouve

$$\int_C (z\bar{z}) d\bar{z} = \int_C y^2 dx - i \int_C x^2 dy = -2Ay_g - 2iAx_g.$$

et par conséquent la cinquième intégrale devient :

$$-\frac{i\rho}{2} \omega^2 \int_C (z\bar{z}) d\bar{z} = -\rho\omega^2 A\bar{z}_g.$$

Quant à la quatrième, nous allons transformer $\frac{\partial\varphi}{\partial t}$ comme il suit.

Nous pourrions mettre successivement :

$$\begin{aligned} u_r dy - v_r dx &= (u + \omega y) dy - (v + \omega x) dx = -v dx + u dy + \omega(x dy - y dx) \\ &= d\psi + \frac{\omega}{2} d(z\bar{z}) = 0, \end{aligned}$$

d'où

$$(76) \quad \psi + \frac{\omega}{2} (z\bar{z}) = h(t)$$

$$(76') \quad \frac{\partial\psi}{\partial t} + \frac{\omega'}{2} (z\bar{z}) - h'(t) = 0.$$

En ajoutant à $\frac{\partial\varphi}{\partial t}$ cette dernière expression, qui reste constamment nulle sur le contour, l'intégrale correspondante ne change pas, même si on multiplie (76') par un facteur constant, que nous allons prendre égal à l'unité imaginaire i . On pourra mettre donc,

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} = \frac{\partial\varphi}{\partial t} + i \frac{\partial\psi}{\partial t} + \frac{i\omega'}{2} (z\bar{z}) - ik'(t) = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{i\omega'}{2} (z\bar{z}) - ik'(t),$$

et écrire plus loin :

$$i\rho \int_C \frac{\partial \varphi}{\partial t} d\bar{z} = i\rho \int_C \frac{\partial f}{\partial t} d\bar{z} - \frac{\rho}{2} \omega' \int_C (z\bar{z}) d\bar{z} = i\rho \int_C \frac{\partial f}{\partial t} d\bar{z} - i\rho \omega' A z_g.$$

Il nous reste à expliciter $\int_C (\bar{z})^2 dz$ qui entre dans la première intégrale :

$$\int_C (\bar{z})^2 dz = \int_C d(\bar{z}^2 z) - 2 \int_C (\bar{z} z) d\bar{z} = -2 \int_C (\bar{z} z) d\bar{z},$$

d'où

$$- \frac{i\rho}{2} \omega^2 \int_C (\bar{z})^2 dz = i\rho \omega^2 \int_C (\bar{z} z) d\bar{z} = 2\rho \omega^2 A z_g.$$

Ainsi, tous les termes sont explicités et l'expression de la résultante peut s'écrire finalement :

$$(77) \quad R = \frac{i\rho}{2} \int_C \frac{df}{dz} df - \rho \int_C \bar{z} df + i\rho \int_C \frac{\partial f}{\partial t} d\bar{z} + \rho A(a - ib) - \rho(\omega^2 - i\omega') A z_g.$$

Dans le cas d'un mouvement uniforme et rectiligne du contour, tous les termes, à l'exception du premier, deviennent nuls; on obtient alors la formule de Blasius (1) :

$$(77') \quad R = \frac{i\rho}{2} \int_C \frac{df}{dz} df.$$

4. Moment résultant. — Le moment par rapport à l'origine de l'effort correspondant à l'élément ds du contour est

$$dM = p(xdx + ydy),$$

et le moment total,

$$M = -\frac{\rho}{2} \int_C (u^2 + v^2)(xdx + ydy) - \rho \int_C \frac{\partial \varphi}{\partial t} (xdx + ydy) \\ - \rho \int_C (ax + by)(xdx + ydy) - \frac{\rho}{2} \omega^2 \int_C (x^2 + y^2)(xdx + ydy) + H(t) \int_C (xdx + ydy).$$

Les deux dernières intégrales sont nulles; pour la troisième, en conservant les mêmes notations que précédemment, on trouve

$$- \rho \int_C (ax + by)(xdx + ydy) = -\rho A(ay_g - bx_g).$$

Quant aux deux premières intégrales, il est à remarquer que $xdx + ydy =$ partie réelle de $z d\bar{z}$; de sorte qu'on peut écrire successivement :

$$(u^2 + v^2)(xdx + ydy) = \text{partie réelle} \left(\left(\frac{df}{dz} + i\omega\bar{z} \right) \left(\frac{\bar{d}f}{d\bar{z}} - i\omega z \right) z d\bar{z} \right) \\ = p.r. \left(\frac{df}{dz} + i\omega\bar{z} \right)^2 z dz = p.r. \left\{ \left(\frac{df}{dz} \right)^2 z dz \right. \\ \left. + 2i\omega\bar{z} \frac{df}{dz} z dz - \omega^2 (\bar{z})^2 z dz \right\},$$

(1) H. Blasius : « Funktionentheoretische Methoden in der Hydrodynamik ». *Zeit. f. Math. und Physik*, vol. 58, p. 90, 1910.

et

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} (x dx + y dy) = p \cdot r \cdot \left\{ \frac{\partial f}{\partial t} z d\bar{z} + \frac{i\omega'}{2} (z\bar{z}) z d\bar{z} - ik'(t) z d\bar{z} \right\}.$$

En observant plus loin qu'on a d'une part

$$p \cdot r \cdot \int_C (\bar{z})^2 z dz = \frac{1}{2} \int_C d(x^2 y^2) = 0;$$

d'autre part,

$$p \cdot r \cdot i \int_C (z\bar{z}) z d\bar{z} = - \int_C d(y^3 x - x^3 y) - 4 \int_C xy (x dx - y dy),$$

et, en désignant par I le moment d'inertie de l'aire du contour par rapport à l'origine, nous aurons

$$p \cdot r \cdot i \int_C (z\bar{z}) z d\bar{z} = 4I.$$

Si nous remplaçons maintenant dans l'expression du moment tous les termes par leurs valeurs correspondantes, explicitées ci-dessus, nous pouvons écrire finalement :

$$(78) \quad M = -p \cdot r \cdot \left\{ \frac{\rho}{2} \int_C z \frac{df}{dz} dz + i\omega\rho \int_C \bar{z} z df + \rho \int_C \frac{\partial f}{\partial t} z d\bar{z} \right\} - 2\rho\omega I - \rho A(ay_g - bx_g).$$

De même que pour la résultante, l'expression (78) du moment se réduit à la formule de Blasius pour le cas de la translation uniforme et rectiligne :

$$(78') \quad M = -p \cdot r \cdot \frac{\rho}{2} \int_C \frac{df}{dz} dz.$$

Nous faisons remarquer que $f(z)$ est toujours finie sur le contour, mais que $\frac{df}{dz}$ peut devenir infinie en un nombre fini de points sur le même contour. Les formules (77) et (78) dont la première intégrale du deuxième membre contient $\frac{df}{dz}$, ne sont valables que dans le cas où la vitesse est finie en tout point. Si pourtant au point c_m elle devient infinie comme $\frac{1}{(z - c_m)^p}$, les intégrales sont encore finies si $p \leq 1$.

§ 3. — Translation rectiligne et uniforme.

Comme nous l'avons fait précédemment, nous allons considérer le mouvement relatif du fluide par rapport au contour immobile. Le déplacement de celui-ci étant rectiligne et uniforme, le mouvement relatif qui en résulte est *permanent*, car, en un point quelconque, les caractéristiques du mouvement ne varient pas avec le temps; par conséquent, le potentiel complexe ne contient pas explicitement la variable t (temps).

1. Représentation du mouvement dans le plan du cercle. — Nous avons trouvé au paragraphe 2 que la représentation du mouvement autour d'un contour sur celui du cercle est indépendante de la forme de ce contour lui-même. On trouve la solution par l'application de la relation fondamentale (71") qui se réduit dans le cas de la translation à l'expression simple :

$$(79) \quad p \cdot \text{im.}[F(\zeta)]_K \equiv 0.$$

Nous avons désigné par ζ le plan du cercle, par $F(\zeta)$ le potentiel et K le contour de la circonférence.

Les vitesses à l'infini du fluide, suivant les axes $\omega\zeta$ et $\omega\eta$ (fig. 14) sont respectivement $-U$ et $-V$.

U et V sont les vitesses rectilignes et uniformes de déplacement du

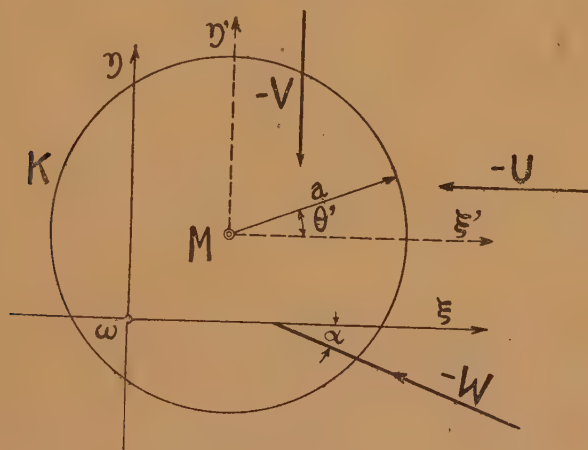


Fig. 14.

contour C . Dans le mouvement relatif autour de celui-ci les particules fluides sont animées (en plus des vitesses de perturbation dues à la présence du contour) des mêmes vitesses égales et de signes contraires. On suppose qu'à l'infini les vitesses de perturbation sont nulles et il ne reste par conséquent que $-U$ et $-V$. D'autre part, nous avons imposé à la fonction $z = z(\zeta)$ de transformation la condition que les deux plans z et ζ se superposent à l'infini ; il en résulte que les vitesses à l'infini sont les mêmes dans les deux plans.

Considérons un autre système d'axes $M\zeta'\eta'$ dont l'origine soit au centre du cercle. Il est évident que le potentiel par rapport à ce système d'axes est développable en une série convergente :

$$F(\zeta') = -(U - iV)\zeta' + A_0 + iB_0 + \frac{A_1 + iB_1}{\zeta'} + \dots + \frac{A_n + iB_n}{\zeta'^n} + \dots$$

compatible avec les vitesses à l'infini. En mettant plus loin pour les

points du cercle $\zeta' = ae^{i\theta'}$, où a représente le rayon, la condition (79) s'exprime par la relation :

$$B_0 - \left(Ua + \frac{A_1}{a} \right) \sin \theta + \left(Va + \frac{B_1}{a} \right) \cos \theta - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{A_n}{a^n} \sin n\theta + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{B_n}{a^n} \cos n\theta \equiv 0,$$

qui est satisfaite pour toute valeur de θ . Il en résulte

$$A_1 = -a^2 U, \quad B_1 = -a^2 V,$$

et

$$A_2 = \dots A_n = B_0 = B_2 = \dots B_n = 0;$$

de sorte qu'on peut écrire

$$F(\zeta') = -(U - iV)\zeta' - (U + iV) \frac{a^2}{\zeta'} + A_0,$$

ou, en désignant par μ le centre M , on a, à une constante près :

$$(80) \quad F(\zeta) = -(U - iV)\zeta - (U + iV) \frac{a^2}{(\zeta - \mu)}.$$

Si à la place de U et V , on se donne la grandeur absolue de la vitesse, soit W , et l'angle α qu'elle fait avec $\omega\xi$, nous pouvons encore écrire :

$$U - iV = We^{i\alpha}, \quad U + iV = We^{-i\alpha},$$

d'où

$$(80') \quad F(\zeta) = -W \left[e^{i\alpha} \zeta + \frac{a^2 e^{-i\alpha}}{(\zeta - \mu)} \right].$$

Mais la condition (79) est compatible encore pour un potentiel logarithmique de la forme :

$$\frac{i\Gamma}{2\pi} \log \frac{\zeta'}{a} = \frac{i\Gamma}{2\pi} \log \frac{(\zeta - \mu)}{a}.$$

En effet, sur le cercle $\zeta' = ae^{i\theta'}$, on a identiquement

$$p. im. \frac{i\Gamma}{2\pi} \log \frac{\zeta'}{a} = \frac{i\Gamma}{2\pi} \log \frac{a}{a} \equiv 0$$

D'une manière générale, en posant toujours la constante arbitraire égale à zéro, on peut écrire finalement :

$$(81) \quad F(\zeta) = -W \left[e^{i\alpha} \zeta + \frac{a^2 e^{-i\alpha}}{(\zeta - \mu)} \right] - \frac{i\Gamma}{2\pi} \log (\zeta - \mu).$$

Pour voir quelle est la signification de Γ , remarquons que sur le contour on a

$$(u - iv)(dx + idy) = udx + vdy + i(udy - vdx) = udx + vdy,$$

de sorte que l'intégrale curviligne

$$\int_C \frac{df}{dz} dz = \int_C udx + vdy,$$

représente la circulation autour du profil dans le plan z . Celle-ci est égale

à celle autour du cercle :

$$\int_C \frac{df}{dz} dz = (f(z))_C = \int_K \frac{dF(\zeta)}{d\zeta} \cdot \frac{d\zeta}{dz} dz = (F(\zeta))_K.$$

De l'expression (81) on déduit facilement que

$$(F(\zeta))_K = \Gamma;$$

et par conséquent Γ représente la circulation autour du contour considéré.

L'expression de la vitesse se déduit facilement de (81) :

$$\frac{df}{dz} = \frac{dF}{d\zeta} \cdot \frac{d\zeta}{dz} = \frac{1}{dz} \times \left\{ -We^{i\alpha} + W \frac{a^2 e^{-i\alpha}}{(\zeta - \mu)^2} - \frac{i\Gamma}{2\pi} \cdot \frac{1}{\zeta - \mu} \right\};$$

de sorte qu'il suffit de connaître $z = z(\zeta)$ pour l'expliciter en chaque point.

2. Effort sustentateur et moment. — Supposons que les deux plans du contour C et du cercle K (z et ζ) soient superposés comme dans la fig. 15, et soit

$$(63) \quad z = \zeta + \frac{q_1}{\zeta} + \dots + \frac{q_n}{\zeta^n},$$

la forme générale de la fonction de transformation des deux plans. Pour

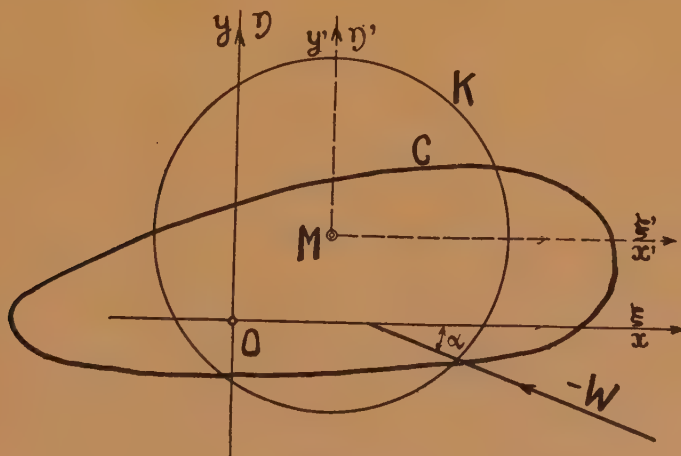


Fig. 15.

trouver la résultante aérodynamique et le moment résultant, il faut appliquer les formules (77') et (78') :

$$(77') \quad R = \frac{i\rho}{2} \int_C \frac{df}{dz} df = \frac{i\rho}{2} \int_K \frac{dF}{d\zeta} \cdot \frac{d\zeta}{dz} \cdot dF,$$

$$(78') \quad M = -p.r. \frac{\rho}{2} \int_C z \frac{df}{dz} df = -p.r. \frac{\rho}{2} \int_K z(\zeta) \frac{dF}{d\zeta} \cdot \frac{d\zeta}{dz} dF.$$

Pour effectuer ces intégrales, il est plus commode de faire un change-

ment de variable et prendre le moment par rapport au centre M, que nous allons désigner par μ . En menant de ce point des axes Mx' , ξ' et $M\eta'$, η' parallèles aux premiers, on remplace z par $z = z' + \mu$ et ζ par $\zeta = \zeta' + \mu$; les expressions (63), (77'), (78') et (81) deviennent alors respectivement :

$$(63'') \quad z' = \zeta' + \frac{q_1}{\zeta'} + \frac{h_2}{\zeta'^2} + \dots + \frac{h_n}{\zeta'^n} + \dots,$$

$$(77'') \quad R = \frac{i\rho}{2} \int_K \frac{dF}{d\zeta'} \cdot \frac{d\zeta'}{dz'} dF,$$

$$(78'') \quad M_{(M)} = -p.r \cdot \frac{\rho}{2} \int_K z'(\zeta) \frac{dF}{d\zeta'} \cdot \frac{d\zeta'}{dz'} dF,$$

$$(81') \quad F(\zeta) = -W \left(e^{ia\zeta'} + \frac{a^2 e^{-ia}}{\zeta'} \right) - \frac{iF}{2\pi} \log \zeta'.$$

En mettant plus loin

$$\begin{aligned} \frac{d\zeta'}{dz'} &= \frac{1}{\frac{dz'}{d\zeta'}} = \frac{1}{1 - \frac{q_1}{\zeta'^2} - \frac{2h_2}{\zeta'^3} - \dots - \frac{nh_n}{\zeta'^{n+1}}} \\ &= 1 + \frac{q_1}{\zeta'^2} + \frac{\chi_2}{\zeta'^3} + \dots + \frac{\chi_n}{\zeta'^{n+1}} + \dots \end{aligned}$$

il est facile de calculer les intégrales qui entrent dans l'expression de R et de $M_{(M)}$, car leurs valeurs sont égales aux *résidus* de Cauchy :

$$\begin{aligned} \int_K \left(-We^{ia} + \frac{Wa^2 e^{-ia}}{\zeta'^2} - \frac{i\Gamma}{2\pi} \frac{1}{\zeta'} \right) \left(1 + \frac{q_1}{\zeta'^2} + \dots + \frac{\chi_n}{\zeta'^{n+1}} + \dots \right) d\zeta' &= -2\Gamma We^{+ia}, \\ \int_K \left(\zeta' + \frac{q_1}{\zeta'} + \frac{h_2}{\zeta'^2} + \dots + \frac{h_n}{\zeta'^n} + \dots \right) \left(-We^{ia} + W \frac{a^2 e^{-ia}}{\zeta'^2} - \frac{i\Gamma}{2\pi} \frac{1}{\zeta'} \right) \left(1 + \frac{q_1}{\zeta'^2} + \dots + \frac{\chi_n}{\zeta'^{n+1}} + \dots \right) d\zeta' &= i4\pi W^2 e^{2ia} q_1. \end{aligned}$$

Ainsi, R et $M_{(M)}$ s'écrivent respectivement :

$$R = -i\rho\Gamma We^{ia}, \quad M_{(M)} = -p.r.2\pi\rho W^2 q_1 e^{2ia}.$$

La première nous indique que la résultante est normale à la direction du courant à l'infini, et sa grandeur absolue, que nous appellerons *sustentation* ou *portance* ($P = \rho W\Gamma$), est identique à la formule de Kutta-Joukowski (41), que nous avons trouvée par une toute autre voie. Si nous mettons

$$q_1 = c^2 e^{2i\gamma},$$

l'expression du moment devient :

$$(82) \quad M_{(M)} = 2\pi\rho W^2 c^2 \sin 2(\alpha + \gamma).$$

REMARQUE. — Dans le calcul des intégrales ci-dessus, nous avons sup-

posé que les quantités sous le signe de l'intégrale sont finies sur tout le contour. S'il n'en est pas ainsi, le seul terme, qui pourrait devenir infini en un nombre fini de points, est $\frac{d\zeta'}{dz'}$; et nous savons que ces points correspondent sur le contour C à des angles vifs (66).

Soit k_m un des points de la circonférence K et supposons qu'en ce point $\frac{d\zeta'}{dz'}$ tend vers l'infini ($\frac{d\zeta'}{dz'} = \rightarrow 0$), comme $\frac{1}{(\zeta - k_m)^p}$; si $p < 1$, les intégrales sont finies et les formules (77'') et (78'') sont encore valables. Pour le cas limite $p = 1$, les intégrales, tout en étant finies, doivent être calculées en ayant égard aux *demi-résidus* de Cauchy.

3. Détermination de la circulation. Hypothèse de Joukowski. — Par définition on appelle *profil aérodynamique* tout contour susceptible de générer une aile d'avion. L'extrémité avant du profil est dite *bord d'attaque*, l'extrémité arrière, *bord de sortie*.

Un *profil théorique* ou *profil de Joukowski* est le profil, dont le bord de

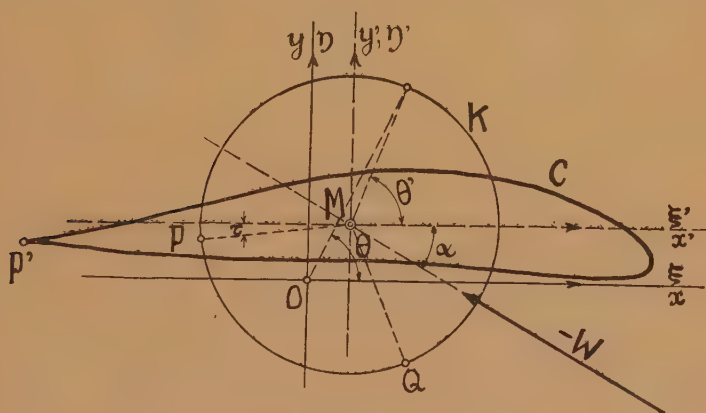


Fig. 16.

sortie est à pointe vive. Considérons un tel profil et soit K le cercle qui lui correspond dans le plan ζ que nous superposons à celui du profil (fig. 16). Ecrivons le potentiel autour de ce cercle par rapport aux axes passant par son centre M :

$$F(\zeta') = -W \left(e^{i\alpha} \zeta' + \frac{a^2 e^{-i\alpha}}{\zeta'} \right) - \frac{i\Gamma}{2\pi} \log \zeta'.$$

La vitesse en un point quelconque sera

$$\frac{dF}{d\zeta'} = -W \left(e^{i\alpha} - \frac{a^2 e^{-i\alpha}}{\zeta'^2} \right) - \frac{i\Gamma}{2\pi} \cdot \frac{1}{\zeta'},$$

et sur le cercle ($\zeta' = ae^{i\theta'}$) :

$$- \frac{1}{\zeta'} \left(2iW \sin(\alpha + \theta') + \frac{i\Gamma}{2\pi a} \right).$$

Il y a deux points P et Q, tels que

$$\theta'_p = \pi + \tau \quad \text{et} \quad \theta'_q = -2\alpha - \tau,$$

où la vitesse s'annule, si l'angle τ vérifie la relation :

$$(83) \quad \Gamma = 4\pi W a \sin(\alpha + \tau).$$

Revenons maintenant aux vitesses du plan z , et explicitons-la, par commodité, toujours par rapport aux variables $z' = z - \mu$ et $\zeta' = \zeta - \mu$:

$$\frac{df}{dz} = \frac{df}{dz'} = \frac{dF}{d\zeta'} \cdot \frac{d\zeta'}{dz'} = - \left\{ W \left(e^{i\alpha} - \frac{a^2 e^{-i\alpha}}{\zeta'^2} \right) + \frac{i\Gamma}{2\pi} \frac{1}{\zeta'} \right\} \cdot \frac{d\zeta'}{dz'}.$$

Elle devient sur le profil :

$$(84) \quad \frac{df}{dz} = - \frac{i}{4\pi\zeta'} \cdot \frac{[\Gamma + 4\pi W a \sin(\alpha + \theta')]}{\frac{dz'}{d\zeta'}}.$$

Sous cette forme, on voit que la vitesse est finie tant que $\frac{dz'}{d\zeta'}$ n'est pas nulle. Mais au point P du cercle, qui correspond à la pointe P' du profil, $\frac{dz'}{d\zeta'} = \frac{dz}{d\zeta} = 0$, comme nous l'avons déjà établi par ailleurs, et par conséquent à la pointe du profil la vitesse devient infinie. Pour qu'il n'en soit pas ainsi, il faut que le numérateur de (84) soit également nul pour le même point. L'angle qui correspond à celui-ci est $\theta' = \pi + \tau$ et le numérateur est nul quand on a :

$$(85) \quad \Gamma = 4\pi a W \sin(\alpha + \tau).$$

Ainsi par conséquent, pour que la vitesse soit finie à la pointe du profil la circulation doit prendre une valeur bien déterminée. Comme par ailleurs, cette valeur correspond à l'angle τ qui rend la vitesse nulle au point P du cercle, il s'ensuit que la pointe du profil doit correspondre sur le cercle au point de vitesse nulle. C'est l'hypothèse de Joukowski, basée, comme on le voit, sur l'impossibilité physique d'avoir une vitesse infinie en un quelconque des points du profil.

La correspondance des points de C et de K est définie d'une manière biunivoque par $z = (z\zeta)$; et la relation (83) exprime que la circulation a une valeur telle, qu'un des points de vitesse nulle sur le cercle, est constamment en P, pour n'importe quelle valeur de W ou de α .

La dérivée $\frac{dz'}{d\zeta'}$ contient forcément le facteur $\left(1 + \frac{ae^{i\tau}}{\zeta'}\right)^p$. Si $p < 1$, la vitesse à la pointe du profil est nulle; si $p = 1$, la vitesse a une valeur non nulle, qu'on trouve en éliminant le facteur en question entre le numérateur et le dénominateur de (84); si $p > 1$, la vitesse est toujours infinie, mais ce cas n'intervient pas sur les profils aérodynamiques.

Passons à une autre catégorie de profils, qui, tout en ayant la forme

générale des profils théoriques, ne présentent pas une pointe vive au bord de sortie, mais celui-ci est *arrondi*. Par opposition aux profils de Joukowski, nous les appellerons *profils à pointe arrondie*. Théoriquement, la vitesse ne devient pas infinie au bord de sortie et l'hypothèse de Joukowski se trouverait en défaut. Cependant elle croît, d'après (84), comme

$$\frac{1}{\frac{dz'}{d\zeta'}} = \frac{1}{\frac{dz}{d\zeta}},$$

et pourrait atteindre des valeurs incompatibles avec les propriétés physiques des fluides. En généralisant alors l'hypothèse de Joukowski, nous admettons que la circulation Γ prend une valeur telle, que le numérateur de (84) s'annule pour le point qui rend $\left| \frac{dz}{d\zeta} \right|$ minimum (1). Si P_0 est ce point, il correspond toujours au point de vitesse nulle sur le cercle, quels qu'ils soient la vitesse W et l'angle α .

Pour chercher ce point P_0 , remarquons qu'on pourrait mettre $\frac{dz}{d\zeta}$ sous la forme ;

$$(66') \quad \frac{dz}{d\zeta} = \left(1 - \frac{\lambda_1}{\zeta}\right) \left(1 - \frac{\lambda_2}{\zeta}\right) \dots \left(1 - \frac{\lambda_n}{\zeta}\right),$$

où les racines $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \dots$ représentent toutes des points $L_1, L_2, L_j, \dots$

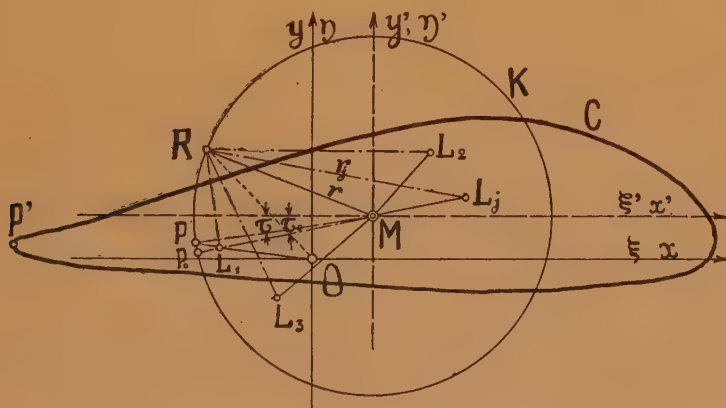


Fig. 17.

situés à l'intérieur du cercle. Le module de $\frac{dz}{d\zeta}$ en un point R sur le cercle aura la valeur (fig. 17) :

$$(85') \quad \left| \frac{dz}{d\zeta} \right| = \frac{r_1 \times r_2 \times \dots \times r_j}{r^j},$$

et, comme $r_2, r_3 \dots r_j$ et r gardent sensiblement une valeur constante autour du point P_0 , on peut admettre approximativement que le mi-

(1) *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, Paris, t. 186, page 842, séance du 24 octobre 1927 et t. 186, page 1014, séance du 14 novembre 1927.

nimum de $\left| \frac{dz}{d\zeta} \right|$ a lieu pour le minimum de r_1 , qui correspond précisément au point P_0 , sur le rayon ML_1P_0 .

Pratiquement $\overline{L_1P_0} = r_1$ est très petit et le point P , qui se trouve sur la droite OL_1P , est situé très près de P_0 . On ne commet pas une erreur appréciable, si, au lieu de supposer que la vitesse nulle correspond au point P_0 , on admet que cela arrive au point P .

Ainsi la circulation autour du profil se trouve déterminée et on peut écrire finalement ;

$$(83') \quad \Gamma = 4\pi aW \sin(\alpha + \tau_0) = 4\pi aW \sin(\alpha + \tau).$$

4. Etude des profils aérodynamiques. — Soit C un profil quelconque et K le cercle correspondant ; supposons que la transformation soit caractérisée par

$$z' = \zeta' + \frac{q_1}{\zeta'} + \frac{q_2}{\zeta'^2} + \dots + \frac{q_n}{\zeta'^n},$$

où $q_1 = c^2 e^{2i\tau}$, et que les deux plans z' et ζ' soient superposés. Effectuons un changement d'axes, en posant $z' = ze^{i\tau}$ et $\zeta' = \zeta e^{i\tau}$, et remarquons que le coefficient du deuxième terme de $z = z(\zeta)$ devient ainsi réel :

$$(86) \quad z = \zeta + \frac{c^2}{\zeta} + \frac{q_2}{\zeta^2} + \dots + \frac{q_n}{\zeta^n}.$$

Représentons, profil et cercle par rapport aux nouveaux axes (fig. 18)

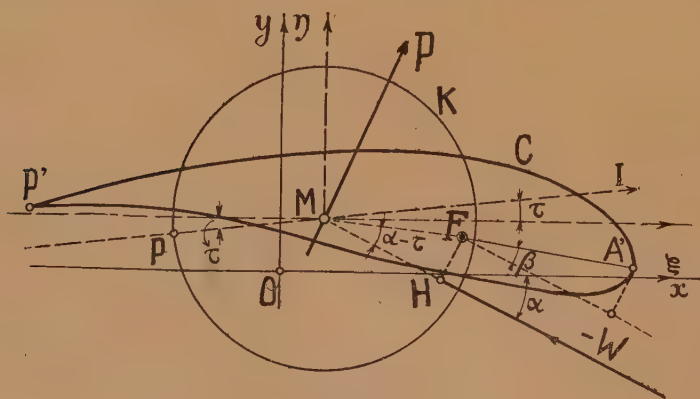


Fig. 18.

et soit α l'angle de la vitesse avec Ox . Si P correspond au bord de sortie P' du profil (*pointe vive ou pointe arrondie*), la circulation prend la valeur

$$\Gamma = 4\pi aW \sin(\alpha + \tau)$$

et la portance, qui est supposée rapportée à un mètre de longueur, devient

$$P = \rho W \Gamma = 4\pi \rho a W^2 \sin(\alpha + \tau).$$

Quand $\alpha = -\tau$ la portance est nulle et la direction PMI s'appelle *axe de portance nulle du profil*.

Généralement on représente les propriétés sustentatrices d'un profil par le coefficient unitaire C_z :

$$C_z = \frac{P}{\frac{\rho}{2} W^2 \times l \times 1} = 8\pi \frac{a}{l} \sin(\alpha + \tau),$$

où l représente la profondeur ou la corde du profil. En désignant par ε un coefficient voisin de zéro, variant pratiquement entre 0,05 et 0,15, on pourrait mettre en général $l(1 + \varepsilon) = 4a$; si par ailleurs, vu la petitesse des angles α et τ , on assimile le sinus $(\alpha + \tau)$ avec l'angle lui-même, l'expression du coefficient C_z défini plus haut devient finalement ;

$$(87) \quad C_z = 2\pi(1 + \varepsilon)(\alpha + \tau) = 2k(\alpha + \tau).$$

Nous avons vu que le moment dépend du module et de l'argument de q_1 . Sous la forme (86), l'argument de q_1 est nul et le module est égal à c^2 ; il s'ensuit pour l'expression du moment par rapport au centre M :

$$M_{(M)} = 2\pi\rho c^2 W^2 \sin 2\alpha.$$

Considérons un point F dans le plan du profil, tel que la droite MF soit symétrique de MP par rapport à My' et le segment $\overline{MF} = \frac{c^2}{a}$.

Calculons le moment par rapport à F :

$$M_{(F)} = M_{(M)} - P \times \overline{MH} = M_{(M)} - 4\pi\rho a W^2 \sin(\alpha + \tau) \frac{c^2}{a} \cos(\alpha - \tau),$$

$$(88) \quad M_{(F)} = -2\pi\rho c^2 W^2 \sin 2\tau.$$

Cette expression est indépendante de l'angle α et, partant, la valeur du moment par rapport à F est un *invariant*. Le point F s'appelle *foyer* du profil et ses propriétés ont été signalées pour la première fois par M. von Mises (1). Comme on le fait pour la portance, on emploie généralement un coefficient unitaire C_{m_0} pour désigner le moment par rapport à F :

$$(88') \quad C_{m_0} = \frac{M_{(F)}}{\frac{1}{2} \rho W^2 \times l \times 1 \times l} = -4\pi \frac{c^2}{l^2} \sin 2\tau = -8\pi \frac{c^2}{l^2} \tau.$$

Dans la technique aéronautique on fait usage très souvent du moment par rapport au bord d'attaque A'. Il est facile de voir que le coefficient unitaire de ce moment est égal à :

$$(89) \quad C_m = C_{m_0} - \frac{\overline{A'F}}{l} \cos \beta \cdot C_z = -8\pi \frac{c^2}{l^2} \tau - \frac{\overline{A'F}}{l} C_z.$$

Du point de vue des applications, la valeur de C_{m_0} joue un rôle très important quant aux caractéristiques des profils et à leur utilisation dans

(1) L. von Mises : « Zur Theorie des Trag flachen auftriebes (Zeit. für Flugtechnik und Motorluft schiffart, 1920, page 87).

la pratique de la technique aéronautique. Ces caractéristiques sont : l'épaisseur relative, la courbure apparente, l'angle à la pointe ou le degré d'arrondi dans le cas de la pointe arrondie, la distribution de l'épaisseur le long de la corde du profil, la direction de l'axe de portance nulle et finalement la valeur de C_{m_0} .

Pour tenir compte de toutes ces caractéristiques, nous nous proposons de chercher dans l'expression de $z = z(\zeta)$ quels sont les paramètres indépendants qui régissent la forme générale des profils. Pour cela, supposons que l'expression (86) de $z = z(\zeta)$ puisse se mettre sous la forme

$$(90) \quad z = \zeta + \frac{c^2}{\zeta} + \sum_{j=0}^j \sum_{k=2}^k \frac{q_{jk}}{(\zeta - t_j)^k},$$

ce qui est toujours possible si t_j représente un point à l'intérieur de cercle et si les racines de $\frac{dz}{d\zeta}$ se trouvent également à l'intérieur, sauf une seule, qui pourrait être sur le cercle et qui correspondrait alors à la pointe vive du profil. En effet, en supposant ces conditions remplies, on peut développer la somme double en une série convergente :

$$\sum_{j=0}^j \sum_{k=2}^k \frac{q_{jk}}{(\zeta - t_j)^k} = \sum_{n=2}^k \frac{q_n}{\zeta^n},$$

et nous retrouvons ainsi la forme de l'expression générale (86).

Soit K le cercle et M son centre que nous allons désigner par μ . Considérons d'abord le deuxième terme du second membre de (90) et mettons :

$$(91) \quad \zeta_1 = \frac{c^2}{\zeta} \left(r_1 e^{i\theta_1} = \frac{c^2}{r_1} e^{-i\theta} \right);$$

quand ζ parcourt les points du cercle K ($\zeta = re^{i\theta}$), ζ_1 parcourt une autre courbe K_1 ($\zeta_1 = r_1 e^{i\theta_1}$) avec un argument égal et de signe contraire au premier ($\theta_1 = -\theta$). Il est facile de montrer que K_1 est également un cercle, dont nous allons indiquer seulement la position de son centre M_1 et son rayon. Pour cela, soit Q (fig. 19) l'intersection de K avec le côté négatif de l'axe O ξ . Ce point correspond au point Q_1 de K_1 , également sur le côté négatif de l'axe O ξ , tel qu'on ait, d'après (91) :

$$\overline{OQ} \times \overline{OQ_1} = c^2 \left(-\overline{OQ_1} = \frac{c^2}{-\overline{OQ}} \right)$$

De Q_1 menons une parallèle à QM et soit OM₁ une droite symétrique à OM par rapport à O η ; l'intersection de Q₁M₁ avec OM₁ est le centre de K₁ et M₁Q₁ est son rayon.

Traçons le cercle auxiliaire K₁ et remarquons qu'à tout point R sur K correspond un point R₁ sur K₁ et la somme géométrique de ces deux rayons vecteurs (OR et OR₁) représente les deux premiers termes du

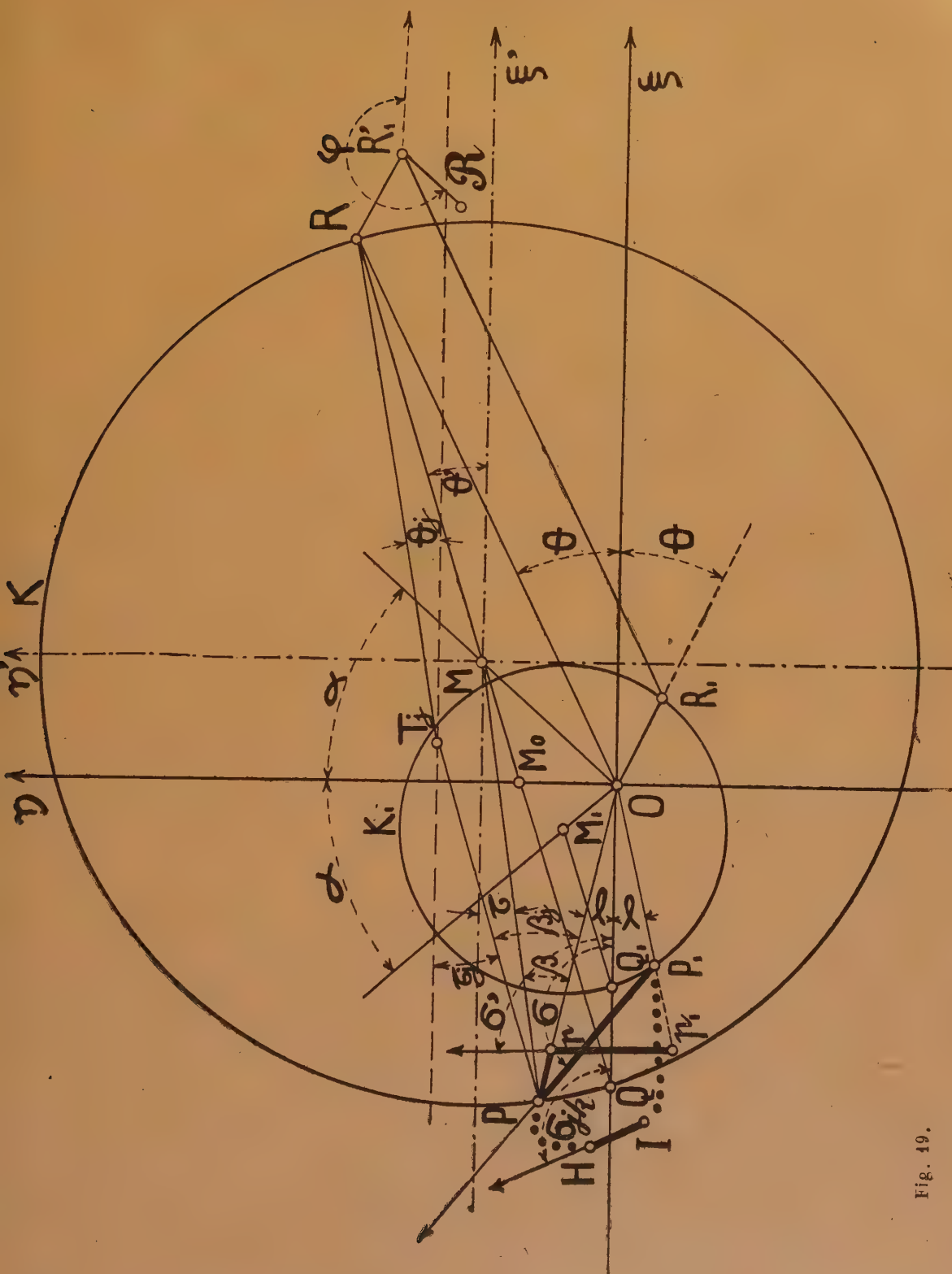


Fig. 19.

second membre de (90) :

$$(91') \quad z_1 = \zeta + \frac{c^2}{\zeta} = \zeta + \zeta_1 = \overline{ORe^{i\theta}} + \overline{OR_1e^{-i\theta}}.$$

On peut ainsi construire graphiquement les points R_1' correspondant à z_1 et cette opération correspond à la construction graphique de Trefftz. Comme les autres termes, qui sont très petits, n'apportent pas de modifications sensibles quant à la profondeur et à l'épaisseur relative maximum, évaluons ces dernières avec une approximation suffisante, en tenant compte seulement de $z_1 = \zeta + \frac{c^2}{\zeta}$. Il est facile de voir qu'on peut écrire pour la profondeur

$$l \approx 2(\overline{OQ} + \overline{OQ_1});$$

quant à l'épaisseur maximum, que nous désignerons par e , elle peut être tirée de la formule suivante, que nous avons donnée dans un autre travail (1) :

$$\frac{\overline{M_0M} \pm 0,33\overline{OQ_1}}{\overline{OQ}} = \frac{1 - 0,77 \frac{e}{l}}{0,77 \frac{e}{l}}.$$

Remarque. — On peut admettre que les coefficients q_{jk} de l'expression (90) soient tous nuls et le second membre se réduit alors aux deux premiers termes et par conséquent à

$$z_1 = \zeta + \frac{c^2}{\zeta}.$$

La dérivée $\frac{dz_1}{d\zeta}$ doit s'annuler pour deux points $\zeta = \pm c$ situés à l'intérieur ou sur le cercle, mais toujours sur l'axe $O\xi$, car c est réel. Si $c < \overline{OQ}$, le profil qui en résulte est à pointe arrondie. Q correspond au point de vitesse nulle sur le cercle et dès lors la circulation Γ et le coefficient du moment unitaire C_{m_0} sont déterminés.

Quand le centre du cercle est à l'origine, le contour est une ellipse.

Si $c = \overline{OQ}$, le profil présente une pointe vive et appartient alors à une catégorie spéciale de profils dits *profils de Joukowski*. Q est également le point de vitesse nulle sur le cercle et de ce fait Γ et C_{m_0} sont déterminés. Il y a deux positions du centre du cercle particulièrement intéressantes : quand il est à l'origine et quand il est en M sur l'axe $O\eta$ (fig. 19a).

Dans le premier cas, le profil est une droite $A'Q'$, dans le second il est un arc de cercle $A'B'Q'$.

(1) Toussaint et Carafoli : *Théorie et Tracé des profils d'ailes sustentatrices*. Librairie Etienne Chiron, Editeur, 40, rue de Seine, Paris.

Revenons à l'expression générale de $z = z(\zeta)$ et prenons le point P comme point de vitesse nulle sur le cercle (le point P' qui lui correspond sur le profil sera le bord de sortie) ; en nous rapportant alors à la valeur

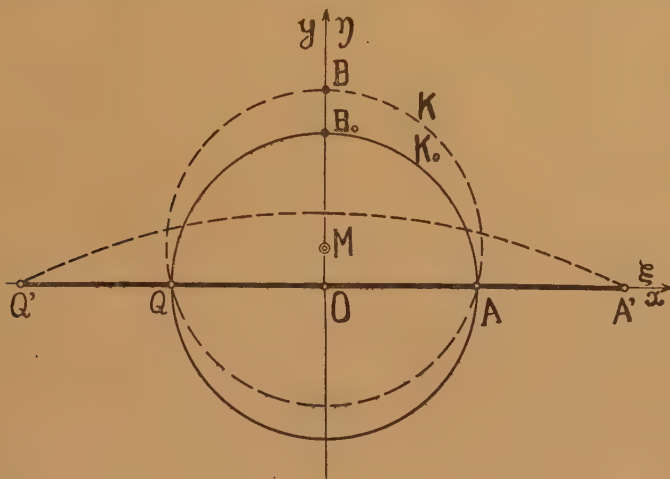


Fig. 19a.

du coefficient C_{m0} tirée de (88') et en y remplaçant la profondeur l par sa valeur trouvée plus haut, nous aurons successivement :

$$C_{m0} = -8\pi \frac{c^2}{l^2} \tau = -8\pi \frac{\overline{OQ} \times \overline{OQ_1}}{4(\overline{OQ} + \overline{OQ_1})^2} \tau = -\frac{\pi}{2} \frac{\left(1 - \frac{\overline{OQ_1}}{\overline{OQ}}\right)^2}{\left(1 - \frac{1}{2} \frac{\overline{OQ_1}}{\overline{OQ}}\right)} \tau \approx -\frac{\pi}{2} \tau.$$

Si on veut compter l'angle τ en degrés, cette expression prend la valeur

$$C_{m0} \approx 0,0275\tau^\circ,$$

et sous cette forme nous allons l'utiliser pour la construction du profil.

En effet, selon le C_{m0} qu'on veut obtenir, on mènera la droite MP faisant l'angle τ° avec $O\xi$ et l'intersection avec le cercle sera le point P de vitesse nulle.

Ce point doit correspondre à la pointe du profil et par suite $\frac{dz}{d\zeta}$ est nulle en P :

$$\left(\frac{dz}{d\zeta}\right)_P = \left(\frac{\zeta - \frac{c^2}{\zeta} - \sum_{j=0}^j \sum_{k=2}^k \frac{k q_{jk}}{(\zeta - t_j)^k} \cdot \frac{\zeta}{(\zeta - t_j)}\right)_P = 0.$$

Au point P correspond le point P₁ sur K₁, et le segment $\overline{P_1P}$, faisant l'angle σ avec ξ , représente la différence $\zeta - \frac{c^2}{\zeta}$, d'où

$$(92) \quad \overline{P_1P} e^{i\sigma} = \left[\sum_{j=0}^j \sum_{k=2}^k \frac{k \cdot q_{jk}}{(\zeta - t_j)^k} \cdot \frac{\zeta}{(\zeta - t_j)} \right]_P.$$

Soit $P_1 \dots IH \dots P$ un polygone, dont le nombre des côtés est égal au nombre des termes de la somme double (de sorte qu'à chacun de ces termes correspond un côté du polygone), et T_j le point qui correspond à t_j . En remplaçant dans (92) ζ par $\zeta = -\overline{OP}e^{-i\gamma}$, où γ est l'angle $\widehat{POQ}$, et en désignant par β_j l'angle $\widehat{T_jPO}$, on obtient

$$\overline{P_1P}e^{i\sigma} = \sum_{j=0}^j \sum_{k=2}^k \frac{k \cdot q_{jk}}{(-1)^k (\overline{T_jP})^k e^{ik\tau_j}} \cdot \frac{\overline{OP}e^{-i\gamma}}{\overline{T_jP}e^{i\tau_j}},$$

d'où on tire la valeur du coefficient q_{jk} , correspondant au côté IH du polygone :

$$q_{jk} = (-1)^k \frac{IH}{k} (\overline{T_jP})^k \left(\frac{\overline{T_jP}}{\overline{OP}} \right) e^{i(\sigma_{ih} + k\tau_j + \beta_j)}.$$

Ainsi tous les coefficients de la somme double sont déterminés et il nous reste maintenant à porter, à partir du point R'_1 , somme des deux premiers termes $\left(\zeta + \frac{c^2}{\zeta} \right)$, les vecteurs correspondant à chacun des termes de la somme double.

Pour celui de l'ordre $(jk)^{\text{ème}}$, on aura comme module et argument respectivement :

$$\left| \frac{q_{jk}}{(\zeta - t_j)^k} \right|_R = (-1)^k \frac{IH}{k} \left(\frac{\overline{T_jP}}{\overline{T_jR}} \right)^k \cdot \frac{\overline{T_jP}}{\overline{OP}},$$

$$\varphi_{jk} = \sigma_{ih} + k\tau_j + \beta_j - k\theta_j.$$

Pratiquement, il n'est pas nécessaire d'avoir un grand nombre de termes et avec un seul terme d'ordre $n^{\text{ème}}$ on peut obtenir tous les profils dont on a besoin en aviation.

Par ailleurs, en ce qui concerne les points T_j , il y a deux cas intéressants : quand T_j se trouve à l'origine ($t_j = 0$) et quand il se trouve au centre M ($t_j = \mu$). En tenant compte de ces considérations, on ne retient de l'expression (90) que les deux formes suivantes :

$$(90') \quad \begin{cases} z = \zeta + \frac{c^2}{\zeta} + \frac{q_n}{\zeta^n}, \\ z = \zeta + \frac{c^2}{\zeta} + \frac{q_m}{(\zeta - \mu)^m}. \end{cases}$$

Le polygone $P_1 \dots IH \dots P$ se réduit dans ce cas au segment P_1P , et le vecteur $\overline{R'_1R'}$, qu'il faut ajouter au point R'_1 pour obtenir le point R' du profil, aura comme module et argument :

$$(93) \quad \begin{cases} \left| \frac{q_n}{\zeta^n} \right| = (-1)^n \frac{\overline{P_1P}}{n} \left(\frac{\overline{OP}}{\overline{OR}} \right)^n = \overline{R'_1R'}, \\ \varphi = \sigma - n\gamma - n\theta, \end{cases}$$

dans le cas de la première transformation (90') et

$$(93') \quad \left\{ \begin{array}{l} \left| \frac{q_m}{(\zeta - \mu)^m} \right| = (-1)^m \frac{\overline{P_1 P}}{m} \cdot \frac{\overline{MP}}{\overline{OR}} = \overline{R_1 R'}, \\ \varphi = \sigma + m\tau + \beta - m\theta', \end{array} \right.$$

dans le cas de la seconde.

Pour ce dernier cas, on voit que le segment $\overline{R_1 R'}$ est le même pour tous les points, mais l'angle θ' est compté à partir de l'axe $M\xi'$, parallèle à $O\xi$.

S'il s'agit des profils à *pointe arrondie*, $\frac{dz}{d\zeta}$ s'annule pour des points situés tous à l'intérieur du cercle K. Soit p l'un de ces points, que nous allons supposer très près du cercle, de sorte que le profil présente un bord de sortie très effilé, sans toutefois qu'il se termine en angle vif. En menant la droite Op , nous trouvons le point P sur le cercle, qui correspond (nous l'avons admis précédemment) au point de vitesse nulle. Les caractéristiques du profil se trouvent ainsi déterminées.

Par un raisonnement analogue à celui précédent et en désignant par p_1 le point qui se déduit de p d'après la relation $\zeta_1 = \frac{c^2}{\zeta}$, on trouve pour le segment additionnel $\overline{R_1' R'}$:

$$\left| \frac{q'_n}{\zeta^n} \right| = (-1)^n \frac{\overline{p_1 p}}{n} \cdot \left(\frac{\overline{Op}}{\overline{OR}} \right)^n,$$

et

$$\varphi' = \sigma' - n\gamma - n\theta$$

$$\left| \frac{q'_m}{(\zeta - \mu)^n} \right| = (-1)^m \frac{\overline{p_1 p}}{m} \left(\frac{\overline{Mp}}{\overline{MP}} \right)^m \cdot \frac{\overline{Mp}}{\overline{Op}},$$

$$\varphi' = \sigma' + n\tau + \beta - n\theta'.$$

Revenons aux profils à *pointe vive* et remarquons que les expressions (90') ne représentent que des profils avec dièdre d'angle nul à la pointe.

En effet, $\frac{dz}{d\zeta}$ s'annule *une seule fois* pour le point P et par suite le terme principal du développement autour de la pointe aura comme expression :

$$z - z_0 = (\zeta - \zeta_0)^2 F(\zeta_0) = (\zeta + \overline{OP'} e^{-i\tau})^2 \times A,$$

d'où il en résulte que l'angle extérieur est égal à 2π et l'angle du dièdre est nul. Pour obtenir un dièdre d'angle δ par exemple, nous allons considérer d'abord un profil ordinaire caractérisé par l'une des expressions (90') : Après avoir tracé ce profil, nous nous proposons de le transformer en un autre ayant un dièdre d'angle δ à la pointe. Pour cela, prenons pour origines des axes la pointe P' du profil dans le plan z et le

centre M du cercle dans le plan ζ et menons par ces points des axes parallèles aux précédents (fig. 20). Par rapport aux nouveaux systèmes

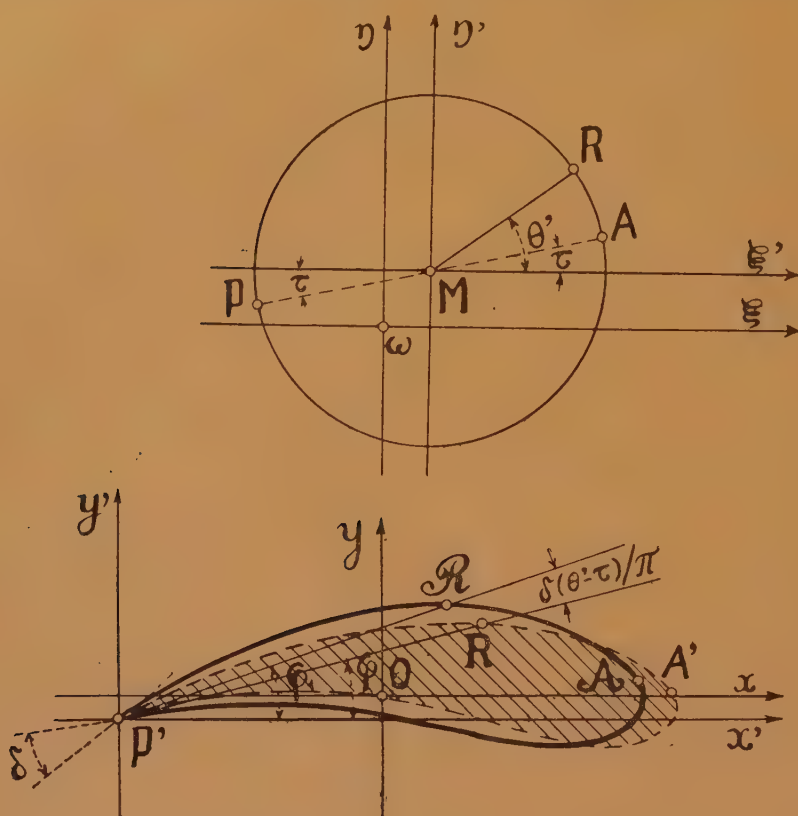


Fig. 20.

d'axes la transformation caractérisant le profil est de la forme (67) :

$$(67') \quad z' = \left(1 + \frac{ae^{i\tau}}{\zeta'}\right)^2 \left(\zeta' + \beta_0 + \frac{\beta_1}{\zeta'} + \dots + \frac{\beta_n}{\zeta'^n} + \dots\right)$$

où a représente le rayon du cercle :

Multiplions les deux membres de (67') avec le facteur

$$\left(1 + \frac{ae^{i\tau}}{\zeta'}\right)^{-\frac{\delta}{\pi}},$$

le nouveau profil qui en résulte :

$$(94) \quad z'_1 = z' \left(1 + \frac{ae^{i\tau}}{\zeta'}\right)^{-\frac{\delta}{\pi}} = \left(1 + \frac{ae^{i\tau}}{\zeta'}\right)^{2-\frac{\delta}{\pi}} \left(\zeta' + \beta_0 + \frac{\beta_1}{\zeta'} + \dots + \frac{\beta_n}{\zeta'^n} + \dots\right)$$

présente à la pointe un angle extérieur $2\pi - \delta$, et par conséquent un dièdre intérieur d'angle δ . Si on met $z'_1 = r_1 e^{i\varphi_1}$ et $z' = r e^{i\varphi}$, l'expression (94) devient

$$r_1 e^{i\varphi_1} = r e^{i\varphi} \left(1 + \frac{ae^{i\tau}}{\zeta'} \right)^{-\frac{\delta}{\pi}} = \frac{r}{\left(2 \cos \frac{\theta' - \tau}{2} \right)^{\frac{\delta}{\pi}}} \times e^{i\left[\varphi + \frac{\delta}{2\pi} (\theta - \tau) \right]},$$

et par conséquent

$$(94') \quad \left\{ \begin{array}{l} r_1 = \frac{r}{\left(2 \cos \frac{\theta' - \tau}{2} \right)^{\frac{\delta}{\pi}}}, \\ \varphi_1 = \varphi + \frac{\delta}{2\pi} (\theta' - \tau). \end{array} \right.$$

Les relations (94') nous permettent de passer d'un profil ordinaire avec dièdre nul à la pointe à un autre d'angle δ ⁽¹⁾.

On peut ne pas tenir compte de l'angle τ , mais alors θ' est compté à partir de l'axe MA prolongement de PM. Il faut remarquer, d'autre part, que pour les points situés sur la demi-circonférence ARP, $\theta' - \tau$ varie de 0 à π et pour l'autre demi-circonférence $\theta' - \tau$ varie de 0 à $-\pi$, c'est-à-dire dans le sens négatif.

5. Détermination des vitesses sur le profil. — On a souvent besoin de connaître la pression en un point du profil ; pour cela il faut connaître

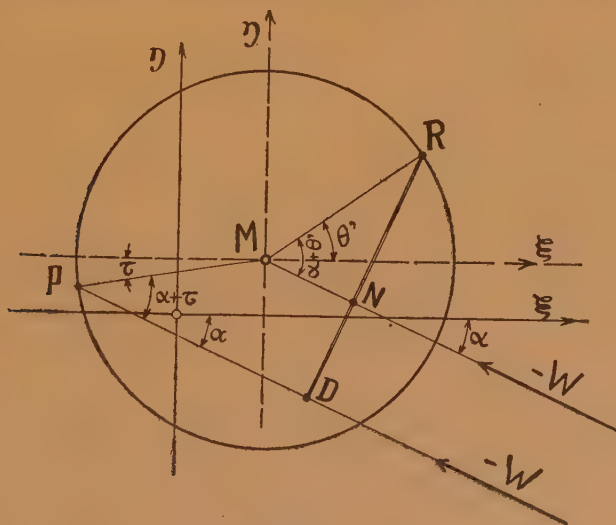


Fig. 21.

la grandeur de la vitesse en ce point. Celle-ci est égale au module de l'expression (84), où on remplace F par sa valeur tirée de (83) :

$$(84') \quad \left| \frac{df}{dz} \right| = W \frac{[\sin(\alpha + \tau) + \sin(\alpha + \theta')]}{\left| \frac{dz}{d\zeta} \right|} = W_R.$$

(1) Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences, t. 185, page 1189, séance du 23 novembre 1927.

On a immédiatement (fig. 21) :

$$\sin(\alpha + \tau) + \sin(\alpha + \theta') = \frac{\overline{ED} + \overline{RE}}{a} = \frac{\overline{RD}}{a}.$$

D'autre part, en nous rapportant aux deux formes (90') de la transfor-

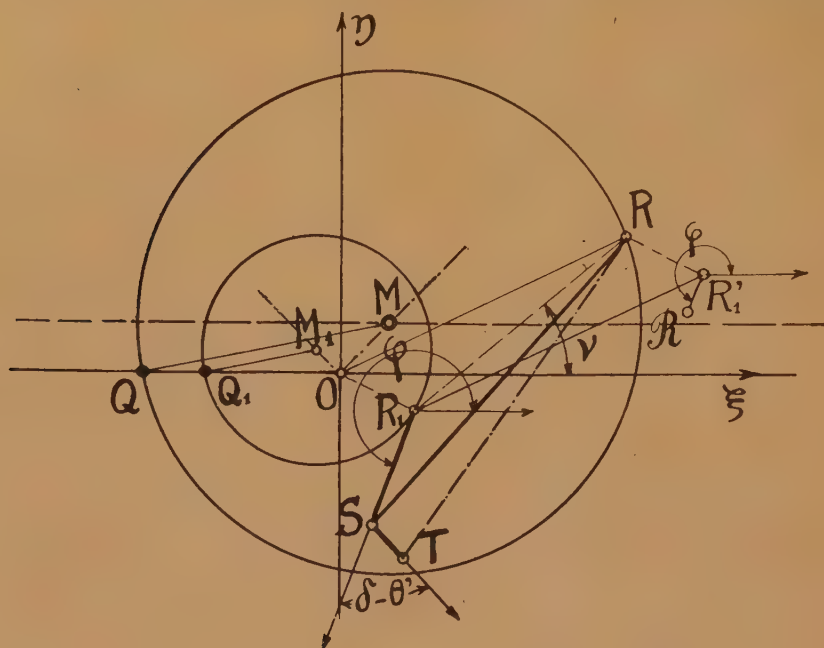


Fig. 22.

mation que nous venons d'étudier, on peut écrire respectivement (fig. 22) pour la première et seconde expression :

$$\left| \frac{dz}{d\zeta} \right| = \frac{\left| \zeta - \frac{c^2}{\zeta} - \frac{nq_n}{\zeta^n} \right|}{|\zeta|} = \frac{|\overline{RR_1}e^{i\nu} - n\overline{R_1R'}e^{i\varphi}|}{\overline{OR}} = \frac{\overline{RS}}{\overline{OR}}$$

et

$$\begin{aligned} \left| \frac{dz}{d\zeta} \right| &= \frac{\left| \zeta - \frac{c^2}{\zeta} - m \frac{q_m}{(\zeta - \mu)^m} \cdot \frac{\zeta}{\zeta - \mu} \right|}{|\zeta|} \\ &= \frac{|\overline{RR_1}e^{i\nu} - m\overline{R_1R'}e^{i\varphi} \left[1 + \frac{\overline{OM}}{a} e^{i(\varphi - \theta')} \right]|}{\overline{OR}} = \frac{\overline{RT}}{\overline{OR}}. \end{aligned}$$

On a finalement :

$$(95) \quad W_R = W \cdot \frac{\overline{RD}}{a} \times \frac{\overline{OR}}{\overline{RS}} \quad \text{et} \quad W_R = W \cdot \frac{\overline{RD}}{a} \times \frac{\overline{OR}}{\overline{RT}}.$$

Ainsi par conséquent, la construction graphique de la vitesse est simple dès qu'on connaît les vecteurs $\overline{RR_1}$ qui ont été nécessaires pour la construction du profil même.

En ce qui concerne les profils avec dièdre non nul à la pointe, l'expression de la vitesse est beaucoup trop compliquée et nous ne croyons pas indispensable de l'exposer ici.

Remarque. — Nous nous sommes proposé au début de chercher les paramètres dont dépendent les caractéristiques des profils. Nous avons conclu plus loin qu'on peut satisfaire à tous les besoins de la pratique en adoptant les deux formes (90') de la fonction de transformation, dont

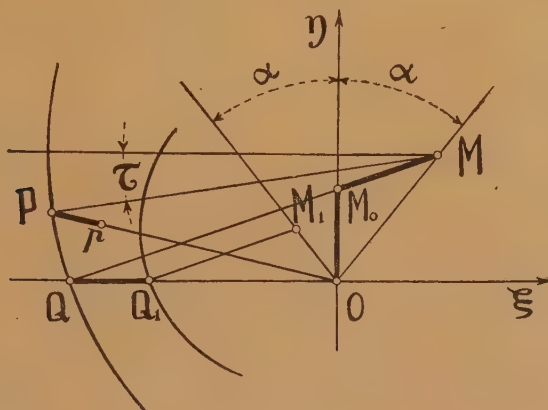


Fig. 23.

on peut étendre les applications aux profils à *pointe effilée*, à *pointe arrondie* et à ceux avec un angle à la pointe. En considérant donc une de ces formes et en fixant *a priori* le degré n (ou m) du troisième terme, nous pouvons définir les paramètres qui régissent la forme des profils de la manière suivante (fig. 23) :

- 1) $\overline{OQ}$ représente en quelque sorte l'unité de l'échelle de l'épure et est environ un quart de la profondeur du profil ;
- 2) $\overline{OM_0}$ définit l'incurvation du profil ;
- 3) $\overline{QQ_1}$ intervient dans la distribution de l'épaisseur du profil le long de la profondeur ;
- 4) $\overline{M_0M}$ entre, avec $\overline{QQ_1}$, dans la relation de l'épaisseur relative maximum :

$$\frac{\overline{M_0 M} \pm 0,33 \overline{Q Q_1}}{\overline{O Q}} = \frac{0,77 \frac{e}{l}}{1 - 0,77 \frac{e}{l}};$$

5) et finalement l'angle τ^0 nous détermine le coefficient du moment à la portance nulle :

$$Cm_0 = 0,0275\tau^0.$$

Pour les profils à pointe arrondie, le segment $\overline{Pp}$ définit le degré d'arrondi.

Nous avons donné pour ce qui concerne l'étude des profils, toutes les données dont on a besoin quant à la construction et nous envoyons le lecteur pour les détails au travail cité plus haut : *Théorie et Tracé des profils d'ailes sustentatrices*, par MM. Toussaint et Carafoli ⁽¹⁾.

Il faut remarquer cependant que tout ce qui précède se rapporte au tracé d'un profil dont on se donne la fonction de transformation et ne traite pas au problème de chercher les caractéristiques d'un profil donné quelconque.

Ce problème inverse est plus difficile et ne se laisse traiter que par des méthodes qui comportent des approximations plus ou moins grandes. Nous citons dans ce sens les travaux de Munk ⁽²⁾, Birnbaum ⁽³⁾, Glauert ⁽⁴⁾, qui se rapportent aux profils infiniment minces, et ceux de Müller ⁽⁵⁾, Höhndorf ⁽⁶⁾, sur les profils épais.

§ 4. — Mouvement de rotation.

Soit O l'origine des axes et C le contour du cylindre indéfini qui tourne autour de O avec une vitesse de rotation angulaire égale à ω .

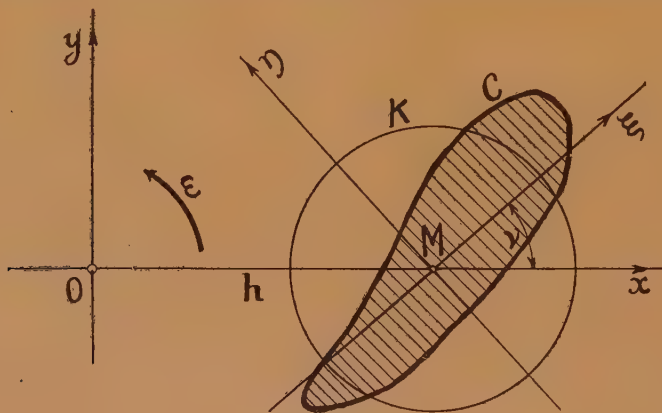


Fig. 24.

Considérons un point M à l'intérieur du contour et supposons que l'axe Ox passe par ce point (fig. 24). Les vitesses absolues des particules fluides

(1) Librairie Aéronautique, Etienne Chiron, éditeur, 40, rue de Seine, Paris.

(2) Munk : *General theory of thin wing sections*, N. A. C. A., 142, 1922.

(3) Birnbaum : *Die tragende Wirbelfläche als Hilfsmittel zur Behandlung des ebenen Problems der Tragflügeltheorie*, Z. A. M. M., 1923.

(4) Glauert : *A theory of thin aerofoils*, R. M., 910, 1924 et *The elements of aerofoils and airscrew theory*, page 87, Cambridge University Press.

(5) Müller : *Die Ermittlung von Auftriebs invarianten vorgegebener Profile*, Z. A. M. M., Bd 5, octobre 1925, page 397.

(6) Höhndorf : *Verfahren zur Berechnung des Auftriebes gegebener Tragflächen-Profile*, Z. A. M. M., Bd 6, août 1926, page 265.

sont prises par rapport au système d'axes mobiles Oxy et nous avons vu que le potentiel complexe correspondant satisfait à la relation

$$(71') \quad \text{p. im. } (df + i\omega \bar{z} dz)_C \equiv 0.$$

1. Détermination du mouvement autour du cercle. — Si M est convenablement choisi, il pourrait être pris pour centre du cercle K ; en considérant ensuite un système d'axes $M\xi\eta$, la représentation du domaine extérieur au contour C sur celui extérieur au cercle K sera définie par la relation :

$$(96) \quad z = h + e^{i\nu} \left(\zeta + \frac{q_1}{\zeta} + \frac{q_2}{\zeta^2} + \dots + \frac{q_n}{\zeta^n} \right).$$

Soit $F(\zeta)$ le potentiel complexe dans le plan ζ ; il se réduit à une constante à l'infini et sur le cercle K satisfait à la relation fondamentale :

$$(71'') \quad \text{p. im. } \left[dF + i\omega \bar{z}(\zeta) \frac{dz}{d\zeta} d\zeta \right]_K \equiv 0.$$

En mettant $Q_m = A_m + iB_m$, on pourra écrire, à une constante près,

$$F(\zeta) = \sum_{m=1}^m \frac{Q_m}{\zeta^m} \quad \text{et} \quad dF = -d\zeta \cdot \sum_{m=1}^m \frac{mQ_m}{\zeta^{m+1}}.$$

Sur le cercle on a

$$\zeta = ae^{i\theta} \quad \text{et} \quad d\zeta = iae^{i\theta} d\theta = i\zeta d\theta,$$

d'où

$$\begin{aligned} \text{p. im. } [dF]_K &= - \text{p. réelle} \left[d\theta \sum_{m=1}^m \frac{mQ_m}{\zeta^m} \right]_K \\ &= -d\theta \cdot \left[\sum_{m=1}^m \frac{mA_m}{a^m} \cos m\theta + \sum_{m=1}^m \frac{mB_m}{a^m} \sin m\theta \right]. \end{aligned}$$

On a d'autre part

$$\text{p. im. } \left[i\omega \bar{z} \frac{dz}{d\zeta} d\zeta \right]_K = - \text{p. im. } \left[d\theta \cdot \omega \bar{z} \frac{dz}{d\zeta} \zeta \right]_K$$

de sorte que nous aurons finalement :

$$(97) \quad \sum_{m=1}^m \frac{mA_m}{a^m} \cos m\theta + \sum_{m=1}^m \frac{mB_m}{a^m} \sin m\theta \equiv - \text{p. im. } \left[\omega \bar{z} \frac{dz}{d\zeta} \zeta \right]_K.$$

En remarquant maintenant qu'on a sur le cercle $\bar{\zeta} = ae^{-i\theta}$ et en mettant $q_n = a_n + ib_n$, on pourra écrire :

$$[\bar{z}]_K = h + e^{-i\nu} \left[ae^{-i\theta} + \frac{a_1 - ib_1}{a} e^{i\theta} + \dots + \frac{a_n - ib_n}{a^n} e^{in\theta} \right],$$

$$\left[\zeta \frac{dz}{d\zeta} \right]_K = e^{i\nu} \left[ae^{i\theta} - \frac{a_1 + ib_1}{a} e^{-i\theta} - \dots - \frac{n(a_n + ib_n)}{a^n} e^{-in\theta} \right],$$

et par suite,

$$\left[\omega \bar{z} \frac{dz}{d\zeta} \zeta \right]_K = \omega h e^{i\psi} \left[a e^{i\theta} - \sum_{n=1}^n \frac{n(a_n + i b_n)}{a^n} e^{-in\theta} \right] - \omega \sum_{n=1}^n \frac{n(a_n + i b_n)}{a^{n-1}} e^{-i(n+1)\theta} \\ + \omega \sum_{n=1}^n \frac{a_n - i b_n}{a^{n-1}} e^{i(n+1)\theta} - \omega \sum_{n=1}^n \frac{a_n - i b_n}{a^n} e^{in\theta} \sum_{n=1}^n \frac{n(a_n + i b_n)}{a^n} e^{-in\theta}.$$

En développant le deuxième membre de cette expression, nous obtenons des termes en $e^{im\theta}$ et $e^{-im\theta}$, où m est un nombre entier qui varie de 1 à $n+1$. Les coefficients de $e^{i\theta}$ et $e^{-i\theta}$ sont respectivement :

$$\omega h e^{i\psi} a - \omega \sum_{n=1}^n \frac{a_n - i b_n}{a^n} \cdot (n-1) \frac{a_{n-1} + i b_{n-1}}{a^{n-1}} \quad \text{pour } e^{i\theta}, \\ - \omega h e^{i\psi} \frac{a_1 + i b_1}{a} - \omega \sum_{n=1}^n \frac{a_{n-1} - i b_{n-1}}{a^{n-1}} \cdot n \frac{a_n + i b_n}{a^n} \quad \text{pour } e^{-i\theta}.$$

Les termes généraux en $e^{im\theta}$ et $e^{-im\theta}$ sont de même :

$$e^{im\theta} \left[\omega \frac{a_{m-1} - i b_{m-1}}{a^{m-2}} - \omega \sum_{n=m}^n \frac{a_n - i b_n}{a^n} (n-m) \frac{a_{n-m} + i b_{n-m}}{a^{n-m}} \right], \\ e^{-im\theta} \left[- \omega h e^{i\psi} \frac{m(a_m + i b_m)}{a^m} - \omega \frac{(m-1)(a_{m-1} + i b_{m-1})}{a^{m-2}} \right. \\ \left. - \omega \sum_{n=m}^n \frac{a_{n-m} - i b_{n-m}}{a^{n-m}} \cdot n \frac{a_n + i b_n}{a^n} \right].$$

Il en résulte immédiatement :

$$\text{p. im.} \left[\omega \bar{z} \frac{dz}{d\zeta} \zeta \right]_K = \omega h a \sin \psi \cos \theta + \omega h a \cos \psi \sin \theta \\ - \omega h \sum_{m=1}^n m \left[\frac{a_m}{a^m} \sin \psi + \frac{b_m}{a^m} \cos \psi \right] \cos m\theta - \omega h \sum_{m=1}^n m \left(\frac{b_m}{a^m} \sin \psi - \frac{a_m}{a^m} \cos \psi \right) \sin m\theta \\ + \omega \sum_{m=2}^{n+1} m \frac{a_{m-1}}{a^{m-2}} \sin m\theta - \omega \sum_{m=2}^{n+1} m \frac{b_{m-1}}{a^{m-2}} \cos m\theta \\ + \omega \sum_{m=1}^n m \sum_{n=m}^n \frac{a_n a_{n-m} + b_n b_{n-m}}{a^{2n-m}} \sin m\theta + \omega \sum_{m=1}^n m \sum_{n=m}^n \frac{a_n b_{n-m} - b_n a_{n-m}}{a^{2n-m}} \cos m\theta.$$

En introduisant cette expression dans l'identité (97), qui est vérifiée pour toute valeur de θ , on trouve respectivement :

$$\frac{A_1}{a} = \frac{\omega h}{a} (a_1 \sin \psi + b_1 \cos \psi) - \omega h a \sin \psi - \omega \sum_{n=1}^n \frac{a_n b_{n-1} - b_n a_{n-1}}{a^{2n-1}}, \\ \frac{B_1}{a} = \frac{\omega h}{a} [b_1 \sin \psi - a_1 \cos \psi] - \omega h a \cos \psi - \omega \sum_{n=1}^n \frac{a_n a_{n-1} + b_n b_{n-1}}{a^{2n-1}},$$

et pour les coefficients du terme général d'ordre m :

$$m \frac{A_m}{a^m} = \omega h m \frac{a_m \sin \psi + b_m \cos \psi}{a^m} + \omega m \frac{b_{m-1}}{a^{m-2}} - \omega m \sum_{n=m}^n \frac{a_n b_{n-m} - b_n a_{n-m}}{a^{2n-m}},$$

$$m \frac{B_m}{a^m} = \omega h m \frac{b_m \sin \nu - a_m \cos \nu}{a^m} - \omega m \frac{a_{m-1}}{a^{m-2}} - \omega m \sum_{n=m}^n \frac{a_n a_{n-m} + b_n b_{n-m}}{a^{m-m}}.$$

On en déduit facilement :

$$(98) \quad \begin{cases} Q_1 = A_1 + iB_1 = -i\omega h a^2 e^{-i\nu} - i\omega h e^{i\nu} q_1 - i\omega \sum_{n=1}^n \frac{q_n \bar{q}_{n-1}}{a^{2n-2}}, \\ Q_m = A_m + iB_m = -i\omega h e^{i\nu} q_m - i\omega a^2 q_{m-1} - i\omega \sum_{n=m}^n \frac{q_n \bar{q}_{n-m}}{a^{2(n-m)}}, \end{cases}$$

et par suite le potentiel $F(\zeta)$ s'écrira finalement :

$$(99) \quad F(\zeta) = -i\omega h a^2 e^{-i\nu} \times \frac{1}{\zeta} - i\omega h e^{i\nu} \sum_{m=1}^n \frac{q_m}{\zeta^m} - i\omega a^2 \sum_{m=2}^{n+1} \frac{q_{m-1}}{\zeta^m} - i\omega \sum_{m=1}^n \frac{1}{\zeta^m} \sum_{n=m}^n \frac{q_n \bar{q}_{n-m}}{a^{2(n-m)}}.$$

Exemples : Il est intéressant de connaître l'expression du potentiel pour quelques contours couramment employés en aérodynamique : cercle, ellipse, profils d'ailes.

a) Pour le cercle, on aura $z = h + \zeta$, et par conséquent

$$\nu = 0, \quad q_1 = q_2 = \dots = q_n = 0,$$

d'où

$$(99_a) \quad F(\zeta) = -i\omega h \frac{a^2}{\zeta}.$$

b) Pour une ellipse, on pourra mettre

$$z = h + e^{i\nu} \left(\zeta + \frac{c^2}{\zeta} \right),$$

où c est plus petit que le rayon a du cercle ; il en résulte :

$$(99_b) \quad F(\zeta) = -i\omega h e^{-i\nu} \frac{a^2}{\zeta} - i\omega h e^{i\nu} \frac{c^2}{\zeta} - i\omega a^2 \frac{c^2}{\zeta^2}.$$

Si $c^2 = a^2$, l'ellipse se réduit à un segment de droite et le cylindre indéfini, à un plan infiniment mince de profondeur égale à quatre fois le rayon du cercle ($l = 4a$). Le potentiel autour de la plaque, obtenu par une voie directe par M. Caldonazzo ⁽¹⁾, a l'expression simple suivante :

$$(99_b') \quad F(\zeta) = -2i\omega h \cos \nu \frac{a^2}{\zeta} - i\omega \frac{a^4}{\zeta^2}.$$

c) Pour déterminer le potentiel autour d'un profil aérodynamique, il faut remarquer d'abord que l'origine des axes dans le plan ζ est le centre même du cercle K (soit M).

Par conséquent la fonction de transformation $z = z(\zeta)$ doit se rapporter implicitement à un système d'axes $M\xi\eta$, passant par le centre

(1) *Vortrage aus dem Gebiete der Hydro-und-Aerodynamik*, (Innsbruck, 1923) Herausgegeben von Th. v. Kármán und Levi-Civita, page 175. Berlin, Verlag von Julius Springer, 1924.

du cercle, sur le plan duquel nous avons représenté le mouvement. Une fois les coefficients $q_1, q_2, \dots, q_n$ connus, le potentiel d'après (99) est déterminé.

Supposons, par exemple, que nous avons affaire à un profil Joukowski caractérisé par

$$z'_1 = \zeta' + \frac{c^2}{\zeta'} \quad (z = h + e^{i\nu} z_1).$$

Mettons

$$z'_1 = z_1 + \mu \quad \text{et} \quad \zeta' = \zeta + \mu,$$

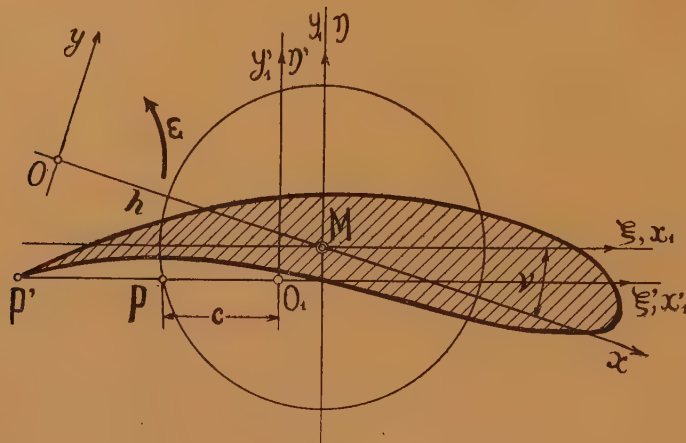


Fig. 25.

nous aurons par rapport aux systèmes d'axes Mxy et $M\xi\eta$ (fig. 25) :

$$z_1 = \zeta + \frac{c^2}{\zeta + \mu} = \zeta + \frac{c^2}{\zeta} - \frac{c^2\mu}{\zeta^2} + \frac{c^2\mu^2}{\zeta^3} - \frac{c^2\mu^3}{\zeta^4} + \frac{c^2\mu^4}{\zeta^5} - \dots$$

Il est facile de voir qu'on a successivement :

$$\sum_{m=1}^n \frac{q_m}{\zeta^m} = \frac{c^2}{\zeta + \mu} = \frac{c^2}{\zeta'},$$

$$\sum_{m=2}^{n+1} \frac{q_{m-1}}{\zeta^m} = \frac{1}{\zeta} \sum_{m=2}^{n+1} \frac{q_{m-1}}{\zeta^{m-1}} = \frac{1}{\zeta} \cdot \frac{c^2}{\zeta + \mu} = \frac{c^2}{\zeta'(\zeta' - \mu)},$$

$$\sum_{n=m}^n \frac{q_n \bar{q}_{n-m}}{a^{2(n-m)}} = (-1)^m c^2 \mu^m \cdot \frac{c^2}{a^2 - \mu \bar{\mu}},$$

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^n \frac{1}{\zeta^m} \sum_{n=m}^n \frac{q_n \bar{q}_{n-m}}{a^{2(n-m)}} &= \frac{c^2}{a^2 - \mu \bar{\mu}} \zeta \sum_{m=1}^n (-1)^m \frac{c^2 \mu^m}{\zeta^{m+1}} \\ &= - \frac{\mu c^2}{a^2 - \mu \bar{\mu}} \cdot \frac{c^2}{\zeta + \mu} = - \frac{\mu c^2}{a^2 - \mu \bar{\mu}} \cdot \frac{c^2}{\zeta'}. \end{aligned}$$

En introduisant ces valeurs dans l'expression générale du potentiel, on

tales (71') et son introduction est nécessaire pour l'explication de la sustentation.

Constatons d'abord que si h croît indéfiniment, et que le produit

$$\omega h = W$$

garde une valeur constante, le potentiel se réduit à

$$\begin{aligned} F(\zeta) &= iWa^2e^{iv} \frac{1}{\zeta} + iWe^{-iv} \sum \frac{q_m}{\zeta^m} - \frac{i\Gamma}{2\pi} \log \zeta, \\ F(\zeta) &= -W \left(\zeta e^{ia} + \frac{a^2}{\zeta e^{ia}} \right) + We^{ia} \zeta - \frac{i\Gamma}{2\pi} \log \zeta. \end{aligned}$$

Pour avoir le mouvement relatif par rapport au contour, il faut ajouter à cette expression le terme $-We^{ia}\zeta$ et le potentiel ainsi réduit correspond à celui trouvé déjà directement pour la translation rectiligne (80).

Revenons à l'expression générale

$$F(\zeta) = \sum_{m=1}^{n+1} \frac{Q_m}{\zeta^m} - \frac{i\Gamma}{2\pi} \log \zeta,$$

et calculons la résultante aérodynamique d'après la formule (77), qui se réduit dans ce cas aux trois termes suivants :

$$R = \frac{i\rho}{2} \int_{\kappa} \frac{dF}{d\zeta} \frac{d\zeta}{dz} dF - \omega\rho \int_{\kappa} \bar{z}(\zeta) dF - \rho\omega^2 A \bar{z}_g.$$

La première intégrale est nulle. En calculant la deuxième, on pourra écrire finalement :

$$R = \rho\omega h\Gamma - 2\pi i\omega\rho e^{iv} \sum_{n=1}^n n \frac{Q_n \bar{q}_n}{a^{2n}} - \rho\omega^2 A \bar{z}_g.$$

Mettons toujours $\omega h = W$ et faisons tendre h vers l'infini ; il reste

$$R = \rho W \Gamma$$

et nous avons ainsi retrouvé le théorème de Kutta-Youkowski.

Pour le moment par rapport à l'origine, on applique la formule (78), qui se simplifie beaucoup dans le cas qui nous intéresse :

$$M = -p \cdot r \cdot \left\{ \frac{\rho}{2} \int_{\kappa} z(\zeta) \frac{dF}{dz} \cdot \frac{d\zeta}{dz} dF + i\omega\rho \int_{\kappa} \bar{z} z df \right\}.$$

La première de ces intégrales est nulle, comme il est facile de se rendre compte en calculant les résidus de Cauchy.

Quant à la deuxième elle devient successivement :

$$\begin{aligned} p \cdot r \cdot -i\omega\rho \int_{\kappa} \bar{z} z df &= p \cdot \text{im.} \cdot \omega\rho \int_{\kappa} \bar{z} z df \\ &= p \cdot \text{im.} \cdot \omega\rho [(\bar{z} z) f(z)]_{\kappa} - p \cdot \text{im.} \cdot \omega\rho \int_{\kappa} f(z) d(\bar{z} z). \end{aligned}$$

Mais on a d'une part $\text{p. im. } f(z) = i\psi(x, y)$, d'autre part, d'après (76), on pourra mettre :

$$\psi(x, y) = k(t) - \frac{\omega}{2} (z\bar{z}),$$

où la constante $k(t)$ est supposée d'ordinaire égale à zéro. Il s'ensuit immédiatement :

$$\text{p. im. } [(z\bar{z})f(z)]_c = 0, \quad \text{p. im. } \int_c f(z)d(z\bar{z}) = i \int_c \left[k(t) - \frac{\omega}{2} (z\bar{z}) \right] d(z\bar{z}) = 0.$$

Comme il fallait s'y attendre, le moment par rapport à l'origine est nul. C'est le paradoxe de d'Alembert.

Ainsi, par conséquent, la résultante passe constamment par l'origine et le moment par rapport à M sera (fig. 26)

$$M_{(M)} = -R_y \times h = \text{p. im. } (R.h)$$

où, en remarquant que le terme qui contient la circulation est réel, on peut écrire finalement :

$$M_{(M)} = -\text{p. im. } \left\{ 2\pi i \rho \omega h e^{i\nu} \sum_{n=1}^n n \frac{Q_n \bar{q}_n}{a^{2n}} + \rho \omega h A \bar{z}_g \right\}.$$

Comme précédemment, faisons tendre h vers l'infini, le deuxième terme du second membre tend vers zéro. Quant au premier, en remplaçant Q_n par sa valeur tirée de (98), où on a changé au préalable les signes de ω et ν , il devient successivement :

$$\begin{aligned} -\text{p. im. } 2\pi i \rho \omega h e^{i\nu} \sum_{n=1}^n n \frac{Q_n \bar{q}_n}{a^{2n}} &= +\text{p. im. } 2\pi \rho W^2 e^{i\nu} \bar{q}_1 \\ &= -\text{p. im. } 2\pi \rho W^2 c^2 e^{-2i(\alpha+\gamma)}, \end{aligned}$$

de sorte qu'on obtient encore l'expression (82) du moment obtenu par une voie directe :

$$(82) \quad M_{(M)} = 2\pi \rho W^2 c^2 \sin 2(\alpha + \gamma).$$

Pour déterminer la circulation Γ , supposons que la pointe P' du profil correspond sur le cercle au point P (fig. 26). En ce point la vitesse doit être constamment nulle, de même que la dérivée $\frac{dz}{d\zeta}$:

$$\left(\frac{dz}{d\zeta} \right)_P = e^{-i\nu} \left(1 - \sum_{n=1}^n \frac{q_n}{\zeta^{n+1}} \right)_P = 0, \quad \text{ou} \quad \left(\sum_{n=1}^n \frac{q_n}{\zeta^{n+1}} \right)_P = 1.$$

D'après l'expression (99) du potentiel, auquel on ajoute le terme logarithmique dû à la circulation, et après avoir changé les signes de ω et de ν , on trouve pour la vitesse :

$$\begin{aligned} \frac{dF}{d\zeta} &= -i\omega h e^{i\nu} \frac{a^2}{\zeta^2} - i\omega h e^{-i\nu} \sum_{m=1}^n m \frac{q_m}{\zeta^{m+1}} - i\omega a^2 \sum_{m=2}^{n+1} m \frac{q_{m-1}}{\zeta^{m+1}} \\ &\quad - i\omega \sum_{m=1}^n \frac{m}{\zeta^{m+1}} \sum_{n=m}^n \frac{q_n \bar{q}_{n-m}}{a^{2(n-m)}} - \frac{i\Gamma}{2\pi} \cdot \frac{1}{\zeta}. \end{aligned}$$

Cette vitesse s'annule au point $P(\zeta = -ae^{i\tau})$; il en résulte pour la circulation

$$\Gamma = 4\pi\omega ha \sin(\alpha + \tau) - 2\pi\omega a^2 \left(\frac{z}{\zeta} \right)_P - 2\pi\omega \left(\sum_{m=1}^n \frac{m}{\zeta_m} \sum_{n=m}^n \frac{q_n \bar{q}_{n-m}}{a^{2(n-m)}} \right)_P.$$

Le premier terme du deuxième membre est identique à la circulation dans le cas d'un mouvement de translation rectiligne de vitesse $\omega h = W$. Pour nous rendre compte de l'importance des autres termes, considérons un profil plan, défini comme on le sait par $z = \zeta + \frac{a^2}{\zeta}$ et soit $l = 4a$ sa profondeur.

En appliquant la formule de la circulation et en remarquant que $\tau = 0$, on trouve

$$\Gamma = 4\pi\omega ha \left(\sin \alpha - \frac{1}{4} \frac{l}{h} \right).$$

On voit ainsi que la circulation est diminuée proportionnellement au quart du rapport de la profondeur sur la distance h . Pratiquement l'épaisseur des profils est assez petite de sorte qu'on peut admettre que la diminution de la circulation pour tous les profils usuels est analogue.

Nous remarquons enfin que la circulation prend la valeur trouvée pour le cas de la translation rectiligne quand h tend vers l'infini.

3. — Distribution des pressions sur une plaque mince en rotation uniforme — La trace de la plaque sur le plan Oxy est le segment AB (fig. 27).

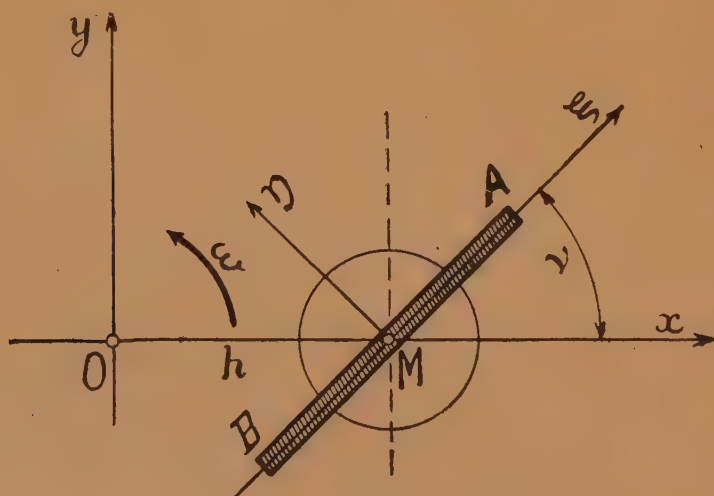


Fig. 27.

La représentation du mouvement sur le cercle est définie par

$$z = h + e^{i\psi} \left(\zeta + \frac{a^2}{\zeta} \right)$$

et nous avons vu que le potentiel qui lui correspond s'écrit, compte tenu de la circulation :

$$F(\zeta) = -2i\omega h \cos \nu \frac{a^2}{\zeta} - i\omega \frac{a^4}{\zeta^3} - \frac{i\Gamma}{2\pi} \log \zeta.$$

La vitesse en un point quelconque sera donnée par l'expression

$$\frac{df}{dz} = \frac{dF}{d\zeta} \cdot \frac{d\zeta}{dz} = e^{-i\nu} \frac{\zeta^2}{\zeta^2 - a^2} \left[2i\omega h \cos \nu \frac{a^2}{\zeta^2} + ri\omega \frac{a^4}{\zeta^3} - \frac{i\Gamma}{2\pi} \frac{1}{\zeta} \right]$$

qui prend des valeurs infinies aux deux extrémités de la plaque ($\zeta = \pm a$). Déterminons la valeur de Γ de telle manière que la vitesse soit finie en

tous les points. Ceci n'est possible que dans le cas où $\nu = \frac{\pi}{2}$ et pour lequel la circulation aura alors la valeur

$$\Gamma = 4\pi\omega a^2.$$

En introduisant cette valeur dans l'expression de la vitesse et en remarquant que $\cos \nu = 0$, celle-ci devient :

$$w = u - iv = - \frac{2i\omega a^2 e^{-i\nu}}{\zeta} = - \frac{2\omega a^2}{\zeta}$$

et le carré de la vitesse absolue :

$$W^2 = \bar{w}w = u^2 + v^2 = \frac{4\omega^2 a^4}{r^2} \quad \left(W = \frac{2\omega a^2}{r} \right).$$

Sur la plaque ($r = a$) la vitesse prend une valeur constante égale à $2\omega a^2$, mais il n'en est pas de même pour les pressions, dont l'équation générale (75) se réduit dans notre cas à l'expression suivante :

$$p = - \frac{\rho}{2} (u_r^2 + v_r^2) + \frac{\rho}{2} \omega^2 (x^2 + y^2) + H(t)$$

ou $u_r = u + \omega y$ et $v_r = v - \omega x$.

En un point quelconque autour de la plaque, qui correspondrait au point de rayon vecteur r et d'angle θ dans le plan du cercle, la valeur de la pression est

$$p = - \frac{\rho}{2} \left\{ \frac{4\omega^2 a^4}{r^2} + 2\omega(uy - vx) \right\} + H(t)$$

où on pourra remplacer $(uy - vx)$ par

$$(uy - vx) = \text{p.im.}(u - iv)(x + iy) = \text{p.im.}\left(-\frac{2\omega a^2}{\zeta}\right)\left(h - i\zeta - i\frac{a^2}{\zeta}\right).$$

On aura finalement :

$$\begin{aligned} p &= H(t) - 2\rho\omega^2 a^2 \left\{ \frac{a^2}{r^2} + \frac{h}{r} \sin \theta + 1 + \frac{a^2}{r^2} \cos 2\theta \right\} \\ &= K(t) - 2\rho\omega^2 a^2 \left(2 \frac{a^2}{r^2} \cos^2 \theta + \frac{h}{r} \sin \theta \right). \end{aligned}$$

En désignant par p_c , p_m , p_{-m} , p_o , respectivement les pressions sur la plaque, au centre, sur les deux faces positive et négative et à l'infini ; par d la distance du centre à un point sur la plaque, on pourra encore écrire les relations :

$$(100) \quad \left\{ \begin{array}{l} p - p_0 = -2\rho\omega^2 a^2 \left[\frac{h}{r} \sin \theta + 2 \frac{a^2}{r^2} \cos^2 \theta \right], \\ p_c - p_0 = -2\rho\omega^2 a^2 \left[\frac{h}{a} \sin \theta + 2 \cos^2 \theta \right], \\ p_c - p_m = -2\rho\omega^2 a^2 \left[\frac{h}{a} (\sin \theta - 1) + 2 \cos^2 \theta \right] \\ \qquad \qquad \qquad = -\rho(\omega d)^2 + 2\rho\omega^2 a h (1 - \sin \theta), \\ p_c - p_m = -\rho(\omega d)^2 - 2\rho\omega^2 a h (1 + \sin \theta). \end{array} \right.$$

§ 5. — Application du mouvement général.

Dans les deux paragraphes précédents nous avons étudié séparément la translation rectiligne et uniforme et la rotation. Si la translation est quelconque (curviligne ou variée par exemple), le potentiel des vitesses est identique à l'expression (80), mais U et V varient avec le temps. En superposant à cette expression celle trouvée pour le mouvement de rotation (99), nous obtenons le potentiel du mouvement le plus général autour d'un contour quelconque. Nous nous proposons de l'appliquer dans le cas d'une aile en régime oscillatoire et d'un rotor à palette.

1. — Régime oscillatoire autour d'un profil d'aile. — Le vol d'un avion peut être décomposé en une translation du centre de gravité et une rotation autour de ce centre, qu'on prend pour origine des axes. Si on suppose que la longueur de l'aile est infinie, le mouvement de l'air autour de celle-ci est un mouvement plan résultant de la superposition de la translation et de la rotation.

Considérons, pour simplifier, un profil Joukowski

$$z_1 = \zeta' + \frac{c^2}{\zeta'} \quad \text{ou} \quad z_1 = \zeta + \frac{c^2}{\zeta};$$

en nous rapportant aux axes $M\xi\eta$ (fig. 28), le potentiel des vitesses autour de ce profil aura comme expression, d'après (99c) :

$$(101) \quad F(\zeta) = -(U + iV)\zeta - (U + iV) \frac{a^2}{\zeta} + i\omega h e^{i\nu} \frac{a^2}{\zeta} \\ + i\omega h e^{-i\nu} \frac{c^2}{\zeta + \mu} + i\omega \frac{a^2 c^2}{\zeta(\zeta + \mu)} - i\omega \frac{\mu c^2}{a^2 - \mu\bar{\mu}} \cdot \frac{c^2}{\zeta + \mu}.$$

On se donne en général les projections de la vitesse de translation par rapport à un système d'axe OXY de directions fixes. OX correspond à la trajectoire générale de l'avion et on peut admettre que la projection de la vitesse de translation sur cette direction garde une valeur moyenne constante.

Cela revient à dire que les vitesses perturbatrices sont négligeables vis-à-vis de la valeur moyenne. Il n'en est pas de même pour les vitesses

perturbatrices dirigées suivant OY. On peut exprimer les vitesses U et V , qui entrent dans l'expression du potentiel, en fonction des projections sur OX et OY, afin de les expliciter par rapport au temps.

L'angle β de Ox avec OX est variable avec le temps; s'il croît indé-

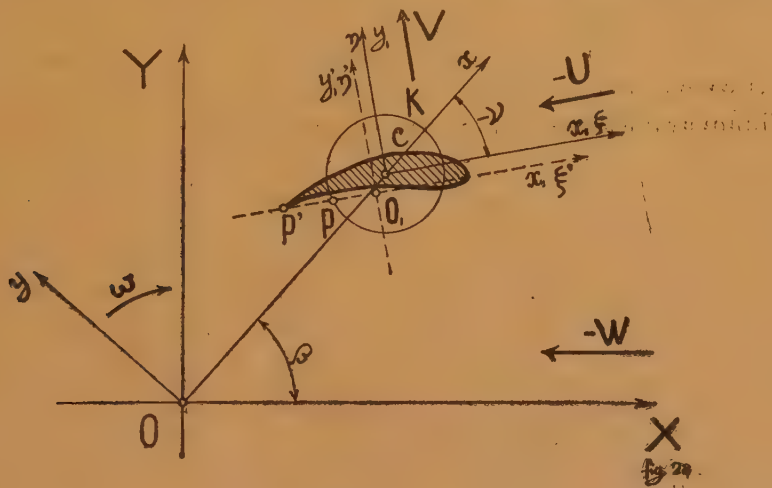


Fig. 28.

niment, le vol correspond à un *looping*, et si par contre, il oscille autour d'une valeur moyenne, le vol correspond à un *régime oscillatoire*.

La vitesse de rotation ω est dans ce cas périodique, ainsi que la vitesse perturbatrice, dont on ne retient que la projection sur OY. Ce mouvement a une importance capitale quant à la *stabilité d'un avion*; malheureusement une difficulté insurmontable apparaît dès qu'on veut déterminer la circulation. En effet, le point de vitesse nulle devant être constamment en P, la circulation varie avec le temps. Pour que le théorème de Thomson ne soit pas en défaut, il est nécessaire que cette variation soit accompagnée de l'apparition de tourbillons, qui se détachent à la pointe du profil et dont la circulation compense la variation ⁽¹⁾. Derrière l'aile, le mouvement est tourbillonnaire et la solution rigoureuse de ce problème, est presque impossible dans l'état actuel de l'analyse mathématique. Nous signalons cependant une tentative faite dans un cas analogue par M. Birnbaum ⁽²⁾, mais la méthode employée est assez laborieuse et mène à des résultats n'intéressant que les petites oscillations et les ailes infiniment minces.

⁽¹⁾ Ce phénomène très important a été mis en évidence expérimentalement par Prandtl : *The Journal of Royal aeronautical Society*, n° 200, août 1927.

⁽²⁾ W. Birnbaum : « Das ebene Problem des Schlagenden Flügels », *Z. A. M. M.* B 4, août 1924, page 277.

Une méthode plus rigoureuse et en même temps plus générale serait la suivante :

La représentation conforme du mouvement dans le plan du profil sur celui du cercle est faite de sorte que les deux plans soient, à une rotation près, superposés à l'infini :

$$\lim_{z_1 \rightarrow \infty} z_1 = x + iy_1 \equiv \lim_{\zeta \rightarrow \infty} e^{-i\nu} \zeta = e^{-i\nu} (\xi + i\eta).$$

La couche de tourbillons qui se détache de la pointe du profil et s'étend à l'infini aval est représentée, sur le plan ζ , par une couche équivalente S_e .

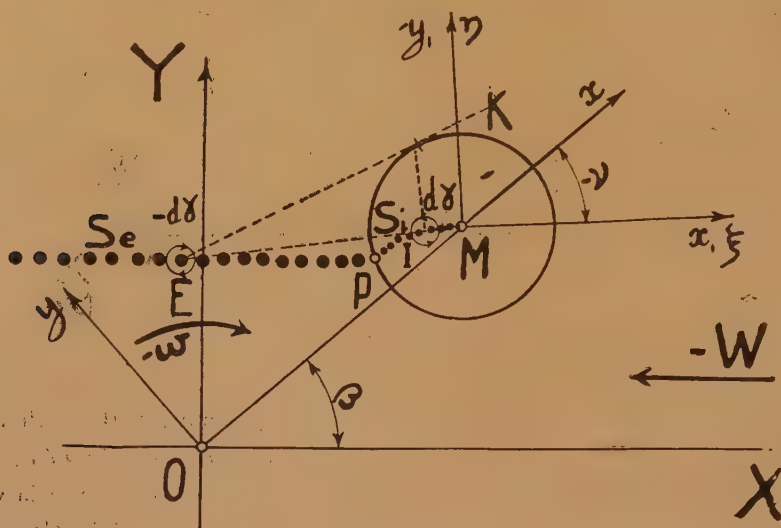


Fig. 28a

attenant au point P (fig. 28a). A un élément de la couche au point E de circulation $-d\gamma$ correspond, à l'intérieur du cercle, au point I, un tourbillon de circulation égale et de signe contraire tel que, a étant le rayon du cercle et I situé sur la droite ME, on ait

$$a^2 = \overline{ME} \times \overline{MI}$$

Le point I est l'image de E par rapport au cercle et cette condition est nécessaire et suffisante pour que le contour du cercle soit une ligne de courant. Une variation $\frac{d\Gamma}{dt} dt$ de la circulation autour de l'aile corres-

pond à un départ simultané du point P de deux tourbillons $\frac{d\Gamma}{dt} dt$ et

$-\frac{d\Gamma}{dt} dt$, le premier à l'intérieur se dirigeant vers le centre de cercle,

l'autre à l'extérieur, vers l'infini aval. Ce dernier se déplace avec la vitesse générale du mouvement au même point, due d'une part au potentiel uniforme (101) établi plus haut, d'autre part, à l'action de la

couche tourbillonnaire totale, extérieure et intérieure au cercle. En tenant compte alors que la vitesse en P est constamment nulle, en faisant plus loin quelques hypothèses simplificatrices quand à l'équation de la courbe S , et négligeant les quantités de deuxième ordre, on pourrait résoudre le problème avec une approximation suffisante.

2. Théorie du rotor à palette. — Supposons que le contour est une ellipse très allongée et que la vitesse de rotation ainsi que celle de translation soient constantes. Le mouvement est périodique, mais les phénomènes moyens sont indépendants du temps. On peut admettre ainsi que

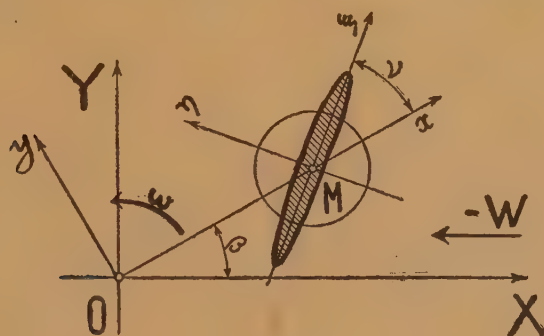


Fig. 29.

la circulation est constamment égale à sa valeur moyenne. Comme nous l'avons déjà écrit, la fonction de transformation pour une ellipse est (fig. 29)

$$z = h + e^{i\nu} \left(\zeta + \frac{c^2}{\zeta} \right) \quad \text{avec } c < a$$

et le potentiel, d'après (80') et (99b) :

$$F(\zeta) = -W \left[\zeta e^{i(\beta+\nu)} + \frac{a^2}{\zeta} e^{-i(\beta+\nu)} \right] - i\omega h e^{-i\nu} \frac{a^2}{\zeta} - i\omega h e^{i\nu} \frac{c^2}{\zeta} - i\omega a^2 \frac{c^2}{\zeta^2} - \frac{i\Gamma}{2\pi} \log \zeta.$$

Pour calculer la résultante aérodynamique, remarquons d'abord que l'aire de l'ellipse est égale à

$$A = \pi \left(a^2 - \frac{c^4}{a^2} \right),$$

et que la quantité $a - ib$, qui entre dans l'expression générale de la résultante (77), est égale à zéro :

$$a - ib = \frac{d}{dt} (W \cos \beta) + \omega W \sin \beta + i \left\{ \frac{d}{dt} (W \sin \beta) - \omega W \cos \beta \right\} = 0.$$

En calculant ensuite les résidus des intégrales de (77), on trouve finalement :

$$R = -i\rho\Gamma W e^{i\beta} - \rho\omega h\Gamma - 4\pi i\rho\omega c^2 W e^{-i(\beta+2\nu)} + 2\pi\rho\omega^2 c^2 h e^{-i2\nu} \\ + 2\pi\rho\omega^2 c^2 \frac{l^2}{a^2} - \rho\omega^2 \pi \left(a^2 - \frac{c^4}{a^2} \right) h.$$

Par rapport aux axes fixes OXY, on aura

$$P = P_x - iP_y = Re^{-i\beta},$$

et sa valeur moyenne pendant la période $T = \frac{2\pi}{\omega}$,

$$P_m = \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi} P dt = -i\rho\Gamma W.$$

Ainsi, une plaque en rotation, placée dans un courant d'air, est un système sustentateur, appelé *Rotor à palette*, et la valeur moyenne de la sustentation est conforme au théorème de Kutta-Joukowski.

D'une manière analogue, on trouve pour le moment par rapport à O, l'expression :

$$M = \rho h\Gamma W \cos \beta + \pi\rho c^2 W^2 \sin 2(\beta + \nu),$$

dont la valeur moyenne pendant une période est nulle.

Il nous reste maintenant à déterminer la circulation Γ . Dans le cas général nous n'en avons pas le moyen, mais nous avons vu dans le paragraphe précédent quelle est la valeur de la circulation pour un plan mince et pour $\nu = \frac{\pi}{2}$. Cette valeur se rapporte au cas d'une rotation uniforme seulement, mais nous allons admettre que la circulation moyenne reste la même si la palette en rotation uniforme est placée en outre dans un courant de vitesse $-W$ à l'infini. En remplaçant, dans l'expression de la sustentation, Γ par sa valeur, on peut écrire

$$P = \rho 4\pi\omega a^2 W = \rho\pi\omega \frac{l^2}{4} W.$$

En désignant par $w = \omega\sqrt{\frac{l^2}{4} + h^2}$ la vitesse périphérique des extrémités A et B du plan mince, on pourra écrire encore

$$(102) \quad \left\{ \begin{array}{l} P = \frac{\pi}{8} \frac{l^2}{\sqrt{\frac{l^2}{4} + h^2}} wW, \\ \text{et} \\ C_x = \frac{P}{\frac{\rho}{2} \times W^2 \times 2 \sqrt{\frac{l^2}{4} + h^2}} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{4 \frac{h^2}{l^2} + 1} \cdot \frac{w}{W}. \end{array} \right.$$

En réalité le mouvement en aval est désordonné et n'obéit pas aux équations de l'hydrodynamique rationnelle; aussi nous affecterons les expressions (102) d'un coefficient réducteur.

CHAPITRE III

THÉORIE DE L'AILE D'ENVERGURE LIMITÉE

Nous avons considéré jusqu'à présent une aile cylindrique indéfinie qui se déplace normalement à la direction de ses génératrices. Le mouvement qui en résultait pour le fluide environnant était identique dans tous les plans perpendiculaires à l'envergure de l'aile. Si celle-ci a une longueur finie, ou si les sections menées parallèlement à un plan quelconque ne sont pas identiques, le mouvement du fluide n'est pas plan et les résultats acquis dans le chapitre précédent ne sont plus applicables. C'est un mouvement à trois dimensions — nous faisons remarquer qu'il s'agit d'un mouvement *permanent* —, dont la solution générale est presque impossible dans l'état actuel de l'hydrodynamique.

On est alors forcé de recourir à des solutions plus ou moins approchées et de réduire le problème à une application des formules obtenues pour le mouvement plan. Pour arriver à ce but la conception de *l'aile fluide* de Prandtl facilite remarquablement la solution. Nous avons vu en effet dans le premier chapitre qu'une aile d'avion est équivalente à un système de tourbillons Ω_a formant la paroi de l'aile et *liés* à celle-ci et à un autre système de *tourbillons libres* formant une nappe indéfinie derrière l'aile.

Présenté sous cette forme, le problème n'est pas plus simple et les difficultés subsistent encore ; seulement il est plus susceptible d'admettre quelques hypothèses simplificatrices. On suppose d'abord que tous les tourbillons liés Ω_a sont parallèles à la direction générale de l'envergure et nous avons vu que cette considération apporte déjà une grande simplification quant au calcul des intégrales qui entrent dans l'expression (39) de la résultante aérodynamique.

Si on admet ensuite — du moins pour les ailes dont l'envergure est assez grande par rapport à la profondeur — que la vitesse *induite* par la nappe des tourbillons libres en une section x de l'aile est sensiblement constante le long de la profondeur, l'effort élémentaire en cette section est rigoureusement proportionnel à la somme des circulations réparties sur toute la section. On peut concentrer alors toutes ces circulations élémentaires en leur centre de gravité et le lieu géométrique de ces points est une ligne unique qui pourrait remplacer l'aile. Ainsi, à la place d'une

surface sustentatrice, on a une *ligne portante*, dont la circulation en chaque point est égale à celle autour de l'aile au même point (fig. 30). Comme par ailleurs les ailes présentent pratiquement une envergure sensiblement droite, on peut admettre que la *ligne portante* AB est rectiligne.

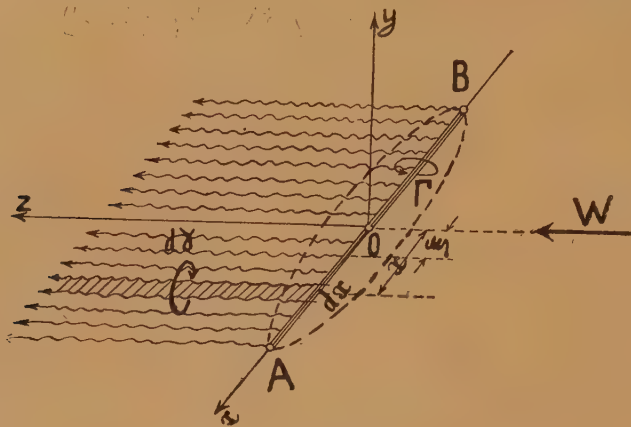


Fig. 30.

Les tourbillons libres se détachent normalement à l'envergure et nous avons vu qu'ils suivent sensiblement la direction du courant général. Nous admettrons donc qu'ils sont parallèles à la vitesse W du courant à l'infini et qu'ils forment par conséquent une nappe plane de largeur égale à l'envergure de l'aile et s'étendant à l'infini aval.

L'intensité tourbillonnaire d'une lanière de largeur dx , qui se détache de l'aile au point x , est égale à la variation en ce point de la circulation. De sorte que, en nous rapportant à la relation (43) du premier chapitre, nous pourrions écrire

$$d\gamma = - \frac{d\Gamma}{dx} dx.$$

Du fait que la nappe est plane, il découle que les *vitesse induites* par les tourbillons de la nappe même, en un quelconque des points de la ligne AB, sont toutes normales au plan de la nappe et par conséquent normales à la vitesse W . En un point ξ , la vitesse élémentaire dv , due à la lanière en x , sera, d'après la loi de Biot-Savart (28) :

$$dv = \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{d\Gamma}{dx} \cdot \frac{dx}{\xi - x},$$

et la vitesse totale au même point ξ ,

$$(103) \quad v = \frac{1}{4\pi} \int_B^A \frac{d\Gamma}{dx} \cdot \frac{dx}{\xi - x}.$$

Quant à la résultante aérodynamique, nous avons vu qu'elle comporte deux composantes : la *poussée* ou *sustentation* et la *traînée* ou résistance

à l'avancement. Si dans les relations (40) on tient compte des simplifications apportées plus haut et en remarquant qu'on a

$$\left| \int_{\tau_a} \Omega_a d\tau \right| = \int \int_{\tau_a} \Omega_a d\sigma ds = \int_B dx \int_{\sigma_a} \Omega_a d\sigma = \int_B \Gamma dx,$$

et

$$\left| \frac{1}{4\pi} \int_{\tau_e} \frac{\mathbf{r} \wedge \Omega_e}{r^3} d\tau \right| = \frac{1}{4\pi} \int_B \frac{d\Gamma}{dx} \frac{dx}{\xi - x} = v$$

suivant Oy .

On déduit pour la poussée et la traînée respectivement :

$$(104) \quad P = \left| \rho W \wedge \int_{\tau_a} \Omega_a d\tau \right| = \rho W \int_B \Gamma dx,$$

suivant Oy , et

$$(105) \quad T = \left| -\frac{\rho}{4\pi} \int_{\tau_a} \Omega_a d\tau \wedge \int_{\tau_e} \frac{\mathbf{r} \wedge \Omega_e}{r^3} d\tau \right| = \rho \int_B \Gamma v d\xi \\ = \frac{\rho}{4\pi} \int_B \Gamma d\xi \int_B \frac{d\Gamma}{dx} \frac{dx}{\xi - x},$$

suivant Oz , parce que la vitesse induite v est dirigée suivant la direction négative de Oy (fig. 30).

Comme on le voit, le problème se réduit à la détermination de la circulation en tous les points de l'envergure. Pour cela, on suppose d'abord que les vitesses v (103) sont très petites par rapport à la vitesse W du courant général. On admet ensuite qu'en chaque section de l'aile, le mouvement serait équivalent à un mouvement plan, dont la vitesse à l'infini aurait deux composantes : W suivant Oz et v suivant Oy . Ceci constitue l'hypothèse fondamentale de Prandtl.

Soit l la profondeur de l'aile au point x de l'envergure et $\beta = \alpha + \tau$

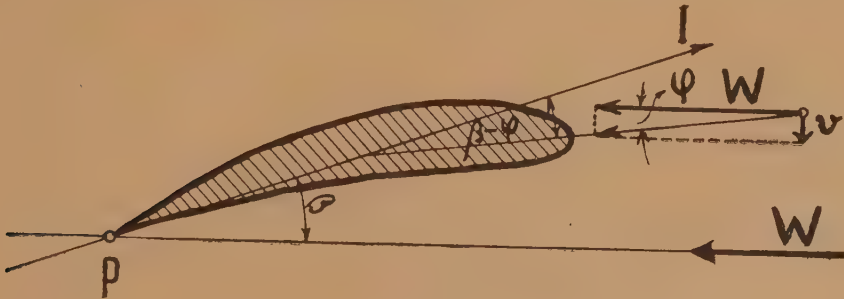


Fig. 31.

l'angle que fait l'axe PI de portance nulle du profil avec la direction de la vitesse (fig. 31). En l'absence de la *vitesse induite* v , la circulation autour du profil serait

$$4\pi a W \sin \beta \approx \pi l (1 + \varepsilon) W \beta = \kappa l W \beta;$$

mais la présence de v modifie la résultante totale de la vitesse dont la

grandeur est approximativement égale à W et l'angle avec PI égal à $\beta - \varphi$, où

$$\varphi \approx \tan \varphi = \frac{v}{W}.$$

On peut écrire finalement pour la circulation :

$$(106) \quad \Gamma = k l W \left(\beta - \frac{v}{W} \right).$$

Cette relation combinée avec l'expression (103)

$$v = -\frac{1}{4\pi} \int_B^A \frac{d\Gamma}{dx} \frac{dx}{\xi - x},$$

nous permet de résoudre tous les problèmes concernant une aile d'envergure limitée et de forme en plan quelconque.

REMARQUE. — L'équation (106) n'est valable que tant que la circulation est une fonction linéaire de l'angle résultant $\beta - \frac{v}{W}$. Si cet angle dépasse une certaine limite, au delà de laquelle des *décollements* surviennent à l'extrados de l'aile, la circulation ne suit aucune loi simple et l'équation (106) est en défaut.

§ 1. — Questions générales.

Nous allons traiter dans ce paragraphe quelques problèmes généraux qu'on peut se poser quand la forme de l'aile n'est pas donnée *a priori*.

1. Distribution de la circulation correspondant à une vitesse induite donnée le long de l'envergure. — Soit une aile AB placée dans un courant

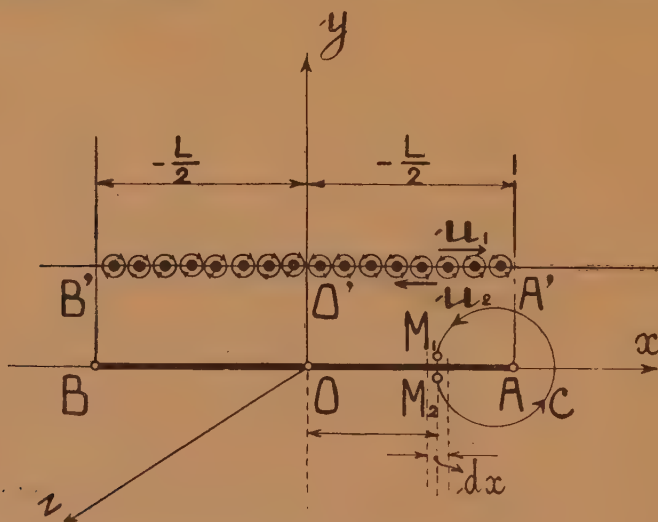


Fig. 32.

de vitesse W suivant Oz (fig. 32). Supposons que le long de l'envergure, la vitesse induite soit donnée.

D'après (103), la circulation autour de l'aile est déterminée et nous nous proposons de trouver quelle est l'expression de cette circulation en fonction de la vitesse v . Pour cela, supposons que la nappe des tourbillons libres, qui en réalité s'étend à l'infini du côté aval de l'aile, soit prolongée en avant à l'infini amont. Les vitesses induites verticales sont alors doubles ($2v$) et le mouvement autour de la nappe est plan si on fait, bien entendu, abstraction de la vitesse du courant général W et du *tourbillon portant* représentant l'aile. En dehors du segment AB, qui représente l'intersection de la nappe par le plan du tableau, les vitesses dérivent d'un potentiel des vitesses. Celui-ci subit une discontinuité à travers AB. En effet, soit M_1 , M_2 deux points infiniment rapprochés d'un côté et de l'autre de la nappe et C un contour qui entoure toute la lanière tourbillonnaire du point x à l'extrémité A. La circulation autour de ce contour est égale à l'intensité tourbillonnaire de la lanière qui est égale à son tour à la circulation autour de l'aile au point x :

$$\int_x^A - \frac{d\Gamma}{dx} dx = (-\Gamma)_x = \Gamma.$$

D'autre part, on a autour du contour :

$$(107) \quad \Gamma = \int_C (u dx + v dy) = \int_{M_2}^{M_1} d\varphi = \varphi_1 - \varphi_2,$$

et par conséquent les valeurs du potentiel sur les faces 1 et 2 au même point sont différentes ; la différence est égale à la circulation en ce point autour de l'aile. Par raison de symétrie $\varphi_2 = -\varphi_1^{(1)}$ et les vitesses u_1 et u_2 sont égales et de signes contraires ; il s'ensuit d'après (107), $\Gamma = 2\varphi_1$ et on peut substituer ainsi, à la recherche de Γ , la recherche du potentiel φ . Pour cela, associons à φ la fonction de courant ψ et, en désignant par $z = x + iy$, mettons :

$$f(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y).$$

Le potentiel complexe $f(z)$ est uniforme — parce que la circulation totale autour de la nappe est nulle — et se réduit à une constante à l'infini. Le terme principal, pour un module de z assez grand, est en $\frac{1}{z}$ et celui de la vitesse en $\frac{1}{z^2}$.

La vitesse induite donnée $2v$ est une fonction de x ; remplaçons x par z et mettons

$$(108) \quad \frac{df}{dz} = -2iv(z) + \frac{df'}{dz},$$

où $f'(z)$ représente un autre potentiel uniforme, dont la partie imaginaire

(1) En effet, si on change le signe de Γ , φ_1 et φ_2 changent également de signes ; mais en même temps les rôles des points M_1 , M_2 se sont inversés réciproquement et à la place de $-\varphi_1$ on doit mettre φ_2 , c. q. f. d.

est constante ou nulle sur le segment AB représentant la nappe. En effet, en un point sur AB, la relation (108) devient

$$\frac{df}{dz} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + i \frac{\partial \psi}{\partial x} = u - 2iv(x) = -2iv(x) + \frac{\partial \varphi'}{\partial x} + i \frac{\partial \psi'}{\partial x},$$

et par suite on a respectivement :

$$(108') \quad \frac{\partial \psi'}{\partial x} = 0 (\psi = c') \quad \text{et} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \varphi'}{\partial x} = \frac{1}{2} \frac{d\Gamma}{dx}.$$

Remarquons plus loin que $v(x)$, donnée dans l'intervalle AB (fig. 33),

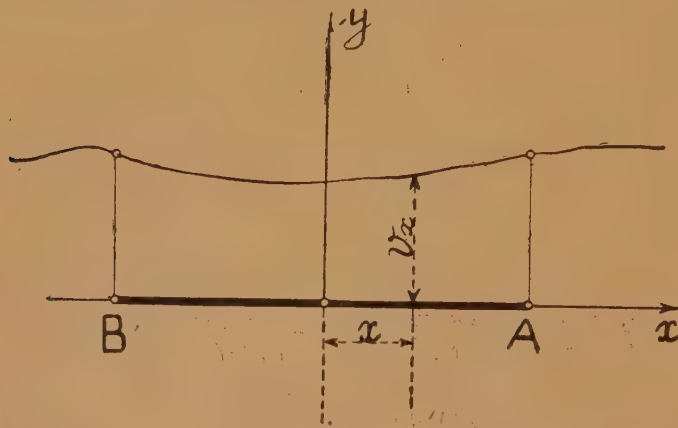


Fig. 33.

est partout finie dans cet intervalle. Personne ne nous empêche de prolonger la courbe de $v(x)$ à droite de A et à gauche de B d'une manière arbitraire, mais ayant partout des valeurs finies. En remplaçant x par z , $v(z)$ ne devient alors infinie en aucun point du plan z et on peut lui appliquer le second théorème de Cauchy pour un point particulier ζ dans le plan z :

$$v(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{v(z)}{z - \zeta} dz = \frac{1}{4\pi} \int_C \frac{df}{dz} \cdot \frac{dz}{z - \zeta} + \frac{1}{4\pi} \int_C \frac{df'}{dz} \cdot \frac{dz}{\zeta - z}.$$

Si le contour C représente un cercle d'un très grand rayon, la première intégrale du troisième membre est nulle, parce que $\frac{df}{dz}$ est de l'ordre de $\frac{1}{z^2}$. Pour un point ξ sur AB, on peut prendre pour contour une courbe infiniment rapprochée de AB ; $\frac{df'}{dz}$ de la deuxième intégrale est égale à $\frac{\partial \varphi'}{\partial x} = \frac{1}{2} \frac{d\Gamma}{dx}$ et on obtient ainsi la relation (103) qu'on avait déjà obtenue par une voie directe :

$$v(\xi) = \frac{1}{4\pi} \int_B^A \frac{d\Gamma}{dx} \frac{dx}{\xi - x}.$$

Revenons à l'expression (108) et remarquons que $f'(z)$ se rapporte au mouvement autour d'une plaque mince immobile, qui remplacerait la nappe tourbillonnaire. Si on représente ce mouvement autour d'un cercle

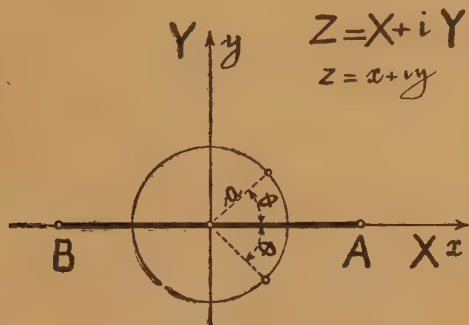


Fig. 34.

du plan Z par exemple (fig. 34), dont le rayon serait le quart de la profondeur — égale à l'envergure L dans notre cas —, le potentiel $F(Z)$ doit se mettre sous la forme :

$$F(Z) = i \sum_{n=1}^n A_n \left(Z^n - \frac{a^{2n}}{Z^n} \right) = i \left(Z - \frac{a^2}{Z} \right) \sum_{n=0}^{n-1} B_n \left(Z^n + \frac{a^{2n}}{Z^n} \right),$$

où A_n et B_n représentent des coefficients réels. En effet, sur le cercle même ($Z = ae^{i\theta}$) le potentiel se réduit à sa partie réelle, qui est une somme de termes en $\sin n\theta$ et prend ainsi des valeurs égales et de signes contraires au même point, sur la face supérieure et inférieure de la plaque (correspondant à $+\theta$ et $-\theta$ sur le cercle). Il est facile de voir, d'après la fonction de transformation,

$$z = Z + \frac{a^2}{Z} \quad \left(a = \frac{L}{4} \right),$$

qu'on a respectivement

$$Z - \frac{a^2}{Z} = \sqrt{z^2 - 4a^2}$$

et

$$Z^n + \frac{a^{2n}}{Z^n} = \left(\frac{z + \sqrt{z^2 - 4a^2}}{2} \right)^n + \left(\frac{z - \sqrt{z^2 - 4a^2}}{2} \right)^n = a_n z^n + a_{n-2} z^{n-2} + \dots$$

En menant ces relations dans l'expression de $F(Z)$, on trouve

$$f'(z) = \sqrt{4a^2 - z^2} (\alpha_0 + \alpha_1 z + \alpha_2 z^2 + \dots + \alpha_{n-1} z^{n-1}),$$

et

$$\frac{df'}{dz} = \frac{1}{\sqrt{4a^2 - z^2}} (\beta_0 + \beta_1 z + \dots + \beta_n z^n).$$

Ainsi, la vitesse aux extrémités A et B ($z = \pm 2a = \pm \frac{L}{2}$) devient infinie et par conséquent la fonction $\frac{df'}{dz}$, de même que $\frac{df}{dz}$ d'ailleurs, n'est pas régulière en tous les points du plan z .

Si on la multiplie par $\sqrt{4a^2 - z^2}$, elle devient régulière dans tout le plan et on peut lui appliquer le second théorème de Cauchy ;

$$\frac{df'}{d\zeta} \sqrt{4a^2 - \zeta^2} = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{df''}{dz} \cdot \sqrt{4a^2 - z^2} \frac{dz}{z - \zeta},$$

d'où, par application de la relation (108), on obtient :

$$\sqrt{4a^2 - \zeta^2} \frac{df'}{d\zeta} = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{df}{dz} \sqrt{4a^2 - z^2} \frac{dz}{z - \zeta} + \frac{2i}{2\pi i} \int_C v(z) \sqrt{4a^2 - z^2} \frac{dz}{z - \zeta},$$

Supposons d'abord que le contour C est un cercle d'un très grand rayon, la première intégrale devient nulle avec $\frac{df}{dz}$; de sorte que, pour un point situé sur AB, l'expression précédente devient, en prenant pour C un contour infiniment rapproché de AB :

$$\sqrt{4a^2 - \xi^2} \frac{\partial \varphi'}{\partial \xi} = \frac{1}{\pi} \int_C v(x) \sqrt{4a^2 - x^2} \frac{dx}{x - \xi},$$

d'où l'on a finalement :

$$(109) \quad \frac{d\Gamma}{d\xi} = \frac{4}{\pi \sqrt{\left(\frac{l}{2}\right)^2 - \xi^2}} \int_B^A v(x) \sqrt{\left(\frac{l}{2}\right)^2 - x^2} \frac{dx}{x - \xi}.$$

Telle est l'expression qui nous donne la distribution de la circulation le long de l'envergure en fonction de la vitesse induite *donnée à priori*. Cette équation a été trouvée pour la première fois par M. Betz ⁽¹⁾ par une voie tout à fait différente, et par une méthode analogue par M. Fuchs ⁽²⁾.

Il est intéressant de remarquer que la variation de Γ est elliptique si v est constante le long de l'envergure.

2. Déterminer les caractéristiques géométriques d'une aile pour une distribution donnée de la circulation le long de l'envergure. — Si on connaît la circulation en chaque point de l'envergure, par application de la formule (103), on en déduit la valeur de la vitesse induite v en ce point. En menant cette valeur dans l'équation générale (106),

$$\Gamma = klW\left(\beta - \frac{v}{W}\right),$$

la relation qui en résulte relie k , l et β en fonction du point respectif de l'envergure. Si les profils formant l'aile sont semblables, k est constant ; pratiquement d'ailleurs ce coefficient est sensiblement le même pour tous les profils. Ainsi, en connaissant en chaque section l'angle β du courant avec l'axe de portance nulle, on détermine la loi de la variation de la profondeur l le long de l'envergure. Cette détermination est simplifiée quand β est constant tout le long de l'envergure. Un cas intéressant est celui

⁽¹⁾ A. Betz : *Beiträge zur Tragflügeltheorie*, Dissertation Göttingen, page 8, Oldenbourg München.

⁽²⁾ Fuchs et Hopf : *Aerodynamik*, page 113, Richard Carl Schmidt et Co 1922, Berlin, W 62.

d'une distribution elliptique de la circulation :

$$\Gamma = \Gamma_0 \sqrt{1 - \left(\frac{2x}{L}\right)^2}.$$

Par application de l'expression (403), la vitesse induite est constante en tous les points de l'envergure et égale à $\frac{\Gamma_0}{2L}$; il en résulte que $\left(\beta - \frac{v}{W}\right)$ est également constant et on voit ainsi que la profondeur l varie comme Γ :

$$l = l_0 \sqrt{1 - \left(\frac{2x}{L}\right)^2}.$$

Comme nous allons le voir par la suite, le cas d'une distribution elliptique de la circulation joue un rôle très important quant à la traînée des ailes.

3. Pour une portance totale donnée, déterminer la loi de variation de la circulation correspondant au minimum de traînée. — Considérons deux plans perpendiculaires à la nappe des tourbillons libres, prolongée à l'infini amont et aval, et soit D la distance qui les sépare. Evaluons l'énergie cinétique totale de la masse fluide comprise entre ces deux plans. Pour cela, menons autour du segment AB (fig. 33) deux contours : C , infiniment rapprochés de AB et C_1 , un cercle de rayon infiniment grand. Nous avons trouvé dans le premier chapitre (§ 1) que l'énergie cinétique totale E de la masse incluse entre les cylindres C et C_1 et les deux plans normaux s'exprime par l'expression (19), qui devient dans notre cas, en remarquant que le potentiel ne contient pas un terme cyclique (le potentiel φ est uniforme et $\chi = 0$),

$$(19') \quad E = -\frac{\rho}{2} \int_{\sigma} \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n} d\sigma = -D \cdot \frac{\rho}{2} \int_C \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n} ds - D \cdot \frac{\rho}{2} \int_{C_1} \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n} ds.$$

Quand le rayon du cercle C_1 tend vers l'infini, la deuxième intégrale du troisième membre tend vers zéro. Quant à la première intégrale, pour laquelle C est infiniment rapproché de AB $\left(\frac{\partial \varphi}{\partial n} = 2v\right)$, il est facile de voir qu'elle devient

$$(110) \quad E = D\rho \int_{\mathfrak{A}} \Gamma v dx = D T,$$

et par conséquent, l'énergie cinétique du fluide compris entre deux plans distants de D est égale au travail de la traînée pendant le temps $\frac{D}{W}$. Le minimum de la traînée (T) pour une portance totale donnée, correspond au minimum de l'énergie cinétique (E), qu'on peut encore écrire sous la forme :

$$E = \frac{\rho}{2} \int_{\tau} \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 \right] d\tau = \frac{\rho}{2} \int_{\tau} \text{grad}^2 \varphi d\tau.$$

De cette expression, on en tire successivement :

$$\begin{aligned}\delta E &= \rho \int_{\tau} \text{grad } \varphi \cdot \text{grad } \delta \varphi d\tau = \rho \int_{\tau} \text{div} (\delta \varphi \text{ grad } \varphi) d\tau \\ &= -\rho \int_{\sigma} \delta \varphi \cdot \text{grad } \varphi \times \mathbf{n} d\sigma = -D \cdot \rho \int_c \delta \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n} ds - D \cdot \rho \int_{c_1} \delta \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n} ds \\ &= D\rho \int_B^A \delta \Gamma \frac{\partial \varphi}{\partial y} dx = 2D\rho \int \delta \Gamma v dx.\end{aligned}$$

On a par ailleurs

$$P = \rho W \int_B^A \Gamma dx \quad \text{et} \quad \delta P = \rho W \int_B^A \delta \Gamma dx,$$

d'où, en désignant par h une constante arbitraire, la condition pour le minimum de E nous donne :

$$\delta E - h \cdot \delta P = 0 \quad \text{ou} \quad v = \text{constante.}$$

Donc, pour que la traînée soit minimum, il faut que la vitesse induite le long de l'envergure garde une valeur constante. D'après la relation (109), où on remplace $v(x)$ par sa valeur constante v , on trouve pour la circulation une distribution elliptique :

$$\Gamma = 2Lv \sqrt{1 - \left(\frac{zx}{L}\right)^2}.$$

La portance et la traînée sont respectivement :

$$P = \pi \frac{\rho}{2} L v W, \quad T = \frac{v}{W} P = \pi \frac{\rho}{2} L v^2.$$

Si on désigne par S la surface totale de l'aile et par $\frac{L^2}{S} = \lambda$ un nombre sans dimensions qu'on appelle *allongement*, les coefficients unitaires C_z et C_x , correspondant à P et T , sont liés par la relation

$$C_x = \frac{C_z^2}{\pi \lambda}.$$

La courbe $C_x = f(C_z)$ s'appelle la *polaire théorique* de l'aile ou la *parabole induite*.

§ 2. — Caractéristiques aérodynamiques d'une aile.

Soit AB une aile rapportée à un système d'axes, dont Ox est suivant l'envergure, Oy suivant la verticale et Oz suivant la direction de la vitesse du courant général, et supposons qu'en chaque section on connaît la profondeur l , l'axe de portance nulle et les autres paramètres du profil correspondant à cette section (fig. 35).

Nous nous proposons de déterminer les caractéristiques aérodynamiques de l'aile, soit : la variation de la circulation le long de l'envergure, la poussée et la traînée, le moment par rapport à un axe parallèle à Ox (*moment de tangage*), le moment par rapport à Oy (*moment de gyration*) et le moment par rapport à Oz (*moment de roulis*).

1. Formules générales. — L'équation fondamentale à résoudre est une équation intégrale résultant des relations (103) et (106) :

$$(111) \quad \Gamma = k l W \left(\beta - \frac{1}{4\pi W} \int_B^A \frac{d\Gamma}{dx} \cdot \frac{dx}{\xi - x} \right).$$

On se rend facilement compte que dans le cas général il est presque

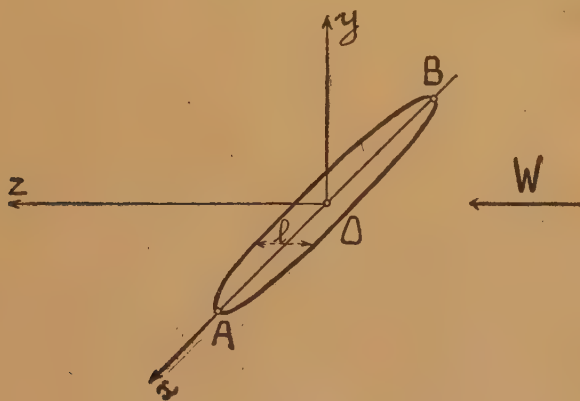


Fig. 35.

impossible d'apporter une solution simple et générale. Aussi, on est conduit à employer des méthodes approximatives et notamment à développer Γ en une série de Fourier. Dans cette dernière voie, nous signalons la méthode de Trefftz ⁽¹⁾ et de Glauert ⁽²⁾, dont l'application est très générale. Elle consiste à remplacer l'abscisse x par $x = -\frac{L}{2} \cos \theta$, ou θ varie de 0 à π quand x varie de $-\frac{L}{2}$ (B) à $+\frac{L}{2}$ (A). La circulation devant changer de signe avec l'angle θ , le développement de Γ en une série de Fourier ne contient pas de termes en cosinus, de sorte qu'on peut mettre :

$$\Gamma = 2LW \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin n\theta.$$

En un point

$$\xi = -\frac{L}{2} \cos \varphi$$

la vitesse induite devient :

$$v = \frac{1}{4\pi} \int_B^A \frac{d\Gamma}{dx} \cdot \frac{dx}{\xi - x} = \frac{W}{\pi} \int_0^\pi \frac{\sum n A_n \cos n\theta}{\cos \theta - \cos \varphi} d\theta,$$

⁽¹⁾ Trefftz : *Prandtl'sche Tragflächen und Propeller-Theorie*, Z.A.M.M., juin 1921, B¹ 1, cahier 3, page 206.

⁽²⁾ Glauert : *The elements of Aerofoil and Airscrew Theory*, Cambridge University Press, page 138.

$A_2 = A_3 = \dots = A_n = 0$ et par conséquent pour une distribution elliptique de Γ :

$$\Gamma = 2LWA_1 \sin \theta = \Gamma_0 \sqrt{1 - \left(\frac{2x}{L}\right)^2}.$$

Les coefficients unitaires C_z et C_x sont de même, en désignant toujours par S la surface totale de l'aile et par $\lambda = \frac{L^2}{S}$ son *allongement* :

$$(113) \quad \begin{cases} C_z = \frac{P}{\frac{1}{2} \rho W^2 S} = \pi \lambda A_1, \\ C_x = \frac{T}{\frac{1}{2} \rho W^2 S} = (1 + \delta) \frac{C_z^2}{\pi \lambda}. \end{cases}$$

Nous n'avons tenu compte jusqu'ici que de la *trainée théorique*, qu'on appelle *résistance induite*. Pour avoir la trainée totale, il faut ajouter les *résistances passives* ou *résistances de profil* dues au frottement de l'air sur les parois de l'aile, aux sillages en aval, etc. ; de sorte que, en désignant par C_{x0} le coefficient unitaire correspondant, on peut écrire définitivement :

$$(113') \quad C_x = C_{x0} + (1 + \delta) \frac{C_z^2}{\pi \lambda}.$$

La courbe $C_x = f(C_z)$ est la *polaire totale* de l'aile.

Supposons que toutes les sections de l'aile soient formées par des profils semblables, et que leurs axes de portance nulle soient deux à deux parallèles ; il en résulte que k et β sont constants le long de l'envergure. Par analogie avec l'expression (87) de C_z pour une aile d'envergure infinie,

$$C_z = 2\pi(1 + \varepsilon)\beta = 2k\beta,$$

nous pouvons mettre dans le cas général :

$$(113'') \quad C_z = \pi \lambda A_1 = 2k_1 \beta = 2 \frac{\pi \lambda A_1}{2\beta} \beta.$$

Pour une même valeur de C_z correspond l'angle β dans le cas d'une aile d'envergure infinie et β_1 dans celui d'une aile finie ; la différence $\beta_1 - \beta$ s'appelle *angle induit total* :

$$(114) \quad \beta_1 - \beta = \frac{C_z}{\pi \lambda} \left(\frac{\beta}{A_1} - \frac{\pi \lambda}{2k} \right) = (1 + \sigma) \frac{C_z}{\pi \lambda}.$$

Le coefficient numérique σ est indépendant de β ; parce que, d'après le système d'équations (112'), les valeurs de $A_1, A_2, \dots, A_n$ sont proportionnelles à β et par conséquent le quotient $\frac{\beta}{A_1}$ ne contient pas β .

Si les profils sont quelconques et disposés d'une manière arbitraire,

on choisit alors une section de référence (la section médiane par exemple) et on prend pour axe de portance nulle une direction telle, qu'elle corresponde à la position pour laquelle la portance totale de l'aile soit nulle. Dans ces conditions, on peut employer encore la relation (114) pour l'angle induit total et la seconde relation (113) pour la résistance induite, mais dans ce cas σ et δ varient avec l'angle d'incidence.

Remarque. — Nous avons défini plus haut un *angle induit total*, qu'il ne faut pas confondre avec l'angle φ , dont nous nous sommes servi au début de ce chapitre :

$$\varphi = \frac{v}{W} = \frac{1}{\sin \theta} \sum n A_n \sin n\theta.$$

Cet angle, en général variable le long de l'envergure, s'appelle *angle induit effectif* et se rapporte toujours à une section déterminée de l'aile.

Pour la section médiane ($\theta = \frac{\pi}{2}$), on aura :

$$\varphi_0 = A_1 - 3A_3 + 5A_5 - 7A_7 + \dots + (4m-1)A_{4m-1} + (4m+1)A_{4m+1} - \dots$$

Evaluons maintenant le moment par rapport à un axe A parallèle à Ox et soit, pour une section x de l'aile, F le foyer du profil, r la dis-

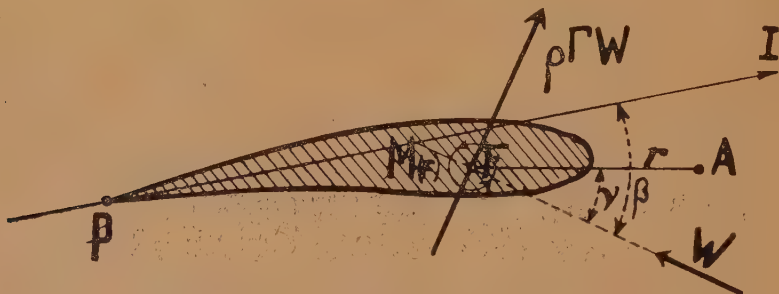


Fig. 36.

tance à l'axe A et v l'angle de FA avec la direction de la vitesse (fig. 36). On aura pour un élément dx de l'aile, d'après (88) :

$$dM_A = -(4\pi\rho W^2 c^2 \tau + \rho W \Gamma r \cos v) dx,$$

d'où, l'angle v étant sensiblement le même pour toutes les sections,

$$(115) \quad M_{(A)} = -4\pi\rho W^2 \int_B^A c^2 \tau dx - \rho W \cos v \int_B^A \Gamma r dx.$$

En désignant, plus loin, par l_0 la corde de la section médiane, on pourra écrire pour le coefficient unitaire :

$$(115') \quad C_{m(A)} = \frac{M_A}{\frac{\rho}{2} W^2 S l_0} = -8\pi \frac{1}{S l_0} \int_B^A c^2 \tau dx - \frac{2 \cos v}{S l_0 W} \int_B^A \Gamma r dx.$$

Le moment par rapport à l'axe Oz (*moment de roulis*) a une expression très simple :

$$(116) \quad M_{oz} = \rho W \int_B x F dx = -\frac{\rho}{2} W^2 \frac{L^3}{2} \int_0^\pi \left(\sum A_n \sin n\theta \right) \sin 2\theta d\theta \\ = -\frac{\rho}{2} W^2 \frac{L^3}{4} \pi A_2.$$

D'une manière analogue, l'expression du moment par rapport à Oy (*moment de gyration*) est

$$M_{oy} = \rho \int_B x v \Gamma dx = \frac{\rho}{2} W^2 L^3 \int_0^\pi \cos \theta \left(\sum n A_n \sin n\theta \right) \left(\sum A_n \sin n\theta \right) d\theta.$$

Mais on a respectivement :

$$\int_0^\pi A_p A_q \sin p\theta \sin q\theta \cos \theta d\theta = 0 \\ \int_0^\pi A_{p+1} A_p \sin (p+1)\theta \sin p\theta \cos \theta d\theta = \frac{\pi}{4} A_{p+1} A_p$$

et par conséquent,

$$(117) \quad M_{oy} = \frac{\rho}{2} W^2 L^3 \frac{\pi}{4} \sum_{p=1}^{n-1} (2p+1) A_p A_{p+1}.$$

Le rapport des deux moments est

$$(118) \quad \frac{M_{oy}}{M_{oz}} = \frac{\sum (2p+1) A_p A_{p+1}}{A_2}.$$

REMARQUE I. — Si l'aile est symétrique par rapport à la section médiane, la circulation reste la même pour $\pm x$, c'est-à-dire pour θ et $\pi - \theta$, de sorte que les termes pairs A_{2p} du développement de Γ sont nuls. Ceci entraîne évidemment

$$M_{oy} = M_{oz} = 0.$$

Pour résoudre le système (112), il suffit de nous rapporter à une moitié de l'aile et prendre les valeurs de θ entre 0 et $\frac{\pi}{2}$.

REMARQUE II. — Si on veut avoir les moments qui agissent dans une section x_1 de l'aile, il suffit de prendre comme limite des intégrales précédentes x_1 et A (correspondant à θ_1 et π).

2. Aile de forme en plan elliptique. — On suppose que les profils sont semblables et *calés* à la même incidence par rapport à l'axe de portance nulle. La profondeur varie elliptiquement et, si l_0 représente la corde médiane, on peut mettre

$$l = l_0 \sin \theta, \quad \mu = \frac{kl_0}{2L} \sin \theta = \mu_0 \sin \theta \quad \text{et} \quad \lambda = \frac{L^2}{S} = \frac{4}{\pi} \frac{l_0}{l}$$

et par conséquent l'équation générale (112) prend la forme :

$$[A_1(\mu_0 + 1) - \mu_0 \beta] \sin \theta + \sum_{n=2}^n A_n \sin n\theta (n\mu_0 + 1) = 0.$$

Cette équation devant être satisfaite pour toute valeur de θ , il est nécessaire que les coefficients A_n soient respectivement :

$$A_1 = \frac{\mu_0 \beta}{1 + \mu_0} \quad \text{et} \quad A_2 = A_3 = \dots A_n = 0.$$

Comme il fallait s'y attendre d'ailleurs, la circulation est elliptique et la vitesse induite constante :

$$\Gamma = 2LWA_1 \sin \theta = \frac{kWl_0\beta}{1 + \frac{2k}{\pi\lambda}} \sqrt{1 - \left(\frac{2x}{L}\right)^2},$$

$$v = WA_1 = W \frac{\frac{2k}{\pi\lambda}}{1 + \frac{2k}{\pi\lambda}} \beta.$$

Il est facile de voir que les coefficients δ et σ , qui entrent dans les expressions de la résistance induite et de l'angle induit, sont nuls :

$$1 + \delta = \sum \frac{nAn^2}{A_1} = 1 \quad \text{et} \quad 1 + \sigma = \frac{\beta}{A_1} - \frac{\pi\lambda}{2k} = \frac{1 + \mu_0}{\mu_0} - \frac{1}{\mu_0} = 1.$$

Il s'ensuit

$$C_x = C_{x_0} + \frac{C_z^2}{\pi\lambda} \quad \text{et} \quad \beta_1 = \beta + \frac{C_z}{\pi\lambda}.$$

Par raison de symétrie, les moments M_{oy} et M_{oz} sont nuls ; quant au moment par rapport à un axe parallèle à Ox , il est formé d'une partie constante et d'une autre dépendant de la portance totale (115).

La première partie correspond au moment de l'aile pour la portance nulle et son coefficient unitaire est égal à

$$Cm_{(c)} = -8\pi \frac{\tau}{Sl_0} \int_B^A c^2 dx = -0,85Cm_0$$

en désignant par Cm_0 le coefficient correspondant au profil de la section médiane.

3. Aile rectangulaire. — Les termes du développement de Γ sont d'indices impairs, comme par ailleurs la série est très convergente, on peut se limiter à 4 termes ⁽¹⁾ :

$$\Gamma = 2LW \{ A_1 \sin \theta + A_3 \sin 3\theta + A_5 \sin 5\theta + A_7 \sin 7\theta \}.$$

En choisissant les 4 valeurs suivantes de θ (ou de x) :

$$\theta = 22^\circ 30' \quad 45^\circ \quad 67^\circ 30' \quad 90^\circ$$

$$\frac{2x}{L} = 0,924 \quad 0,707 \quad 0,383 \quad 0$$

et en les rapportant dans le système (112'), on détermine les coefficients A_1 , A_3 , A_5 et A_7 en fonction de β , dont ils sont proportionnels. En nous

(1) Trefftz et Glanert l. c.

rappelant que nous avons les relations :

$$\mu = \frac{kl}{zL} = \frac{k}{2\lambda} = \frac{1}{2 \frac{\lambda}{k}} \quad \text{et} \quad \mu\beta = \frac{C_z}{\pi\lambda} \left(\frac{\mu\beta}{A_1} \right).$$

$$1 + \varepsilon = \frac{A_2 + 3A_3^2 + 5A_5^2 + 7A_7^2}{A_1^2} \quad \text{et} \quad 1 + \sigma = 2 \frac{\lambda}{k} \left(\frac{\mu\beta}{A_1} - \frac{\pi}{4} \right),$$

$$\frac{\varphi_0}{\mu\beta} = \frac{A_1 - 3A_3 + 5A_5 - 7A_7}{\mu\beta} \quad \text{et} \quad [\text{d'après (113)}] \quad \frac{k_1}{k} = \frac{\pi}{4} \left(\frac{A_1}{\mu\beta} \right).$$

nous pouvons dresser le tableau suivant en fonction de $\frac{\lambda}{k}$:

TABLEAU

$\frac{\lambda}{k}$	$\frac{\lambda}{k_1}$	$\frac{\lambda}{1+\varepsilon}$	$\frac{A_1}{\mu\beta}$	$\frac{A_3}{\mu\beta}$	$\frac{A_5}{\mu\beta}$	$\frac{A_7}{\mu\beta}$	$\frac{k_1}{k}$	σ	δ	$\frac{\varphi_0}{\mu\beta}$	$\frac{\mu\beta}{A_1}$
0	0,640	0	0	0	0	0	0	0	0	0	∞
0,10	0,747	0,314	0,171	0,002	~ 0	~ 0	0,134	0,013	~ 0	0,165	5,830
0,25	0,908	0,785	0,351	0,008	~ 0	~ 0	0,275	0,030	~ 0	0,327	2,850
0,50	1,175	1,57	0,541	0,023	~ 0	~ 0	0,45	0,065	0,006	0,466	1,850
0,75	1,449	2,355	0,660	0,042	~ 0	~ 0	0,518	0,09	0,012	0,534	1,513
1 —	1,705	3,14	0,748	0,060	0,009	0,0014	0,587	0,10	0,019	0,553	1,336
1,5	2,225	4,71	0,859	0,090	0,016	0,0027	0,675	0,14	0,034	0,649	1,115
2. —	2,750	6,28	0,923	0,115	0,023	0,0041	0,729	0,17	0,049	0,668	1,077
2,5	3,260	7,86	0,976	0,136	0,030	0,0055	0,767	0,20	0,063	0,680	1,025
3. —	3,780	9,43	1,011	0,154	0,036	0,0070	0,794	0,22	0,076	0,680	0,990
3,5	4,290	11,00	1,038	0,169	0,042	0,0084	0,815	0,24	0,088	0,680	0,965

La relation entre $\frac{\lambda}{k_1}$ et $\frac{\lambda}{k}$ pourrait s'exprimer par une équation linéaire :

$$\frac{\lambda}{k_1} = 0,64 + 1,04 \frac{\lambda}{k}.$$

Le tableau précédent nous permet de trouver facilement les caractéristiques théoriques d'une aile d'allongement λ quand on connaît le profil de cette aile. En effet, k est connu ainsi que $\frac{\lambda}{k}$; d'où on déduit les autres coefficients : $k_1 (C_z = 2k_1\beta)$, σ , δ , φ_0 et μ . Pratiquement on peut prendre $k = \pi(1 + \varepsilon) \leq \pi$, car ε est petit pour les profils usuels.

Effectuons l'opération inverse : supposons par exemple que nous connaissions les caractéristiques expérimentales d'une aile d'allongement λ

Une intéressante application du cas général serait la détermination des caractéristiques d'une aile ordinaire déformée par les ailerons de *courbure ou de défense latérale*. On connaît par exemple les propriétés de l'aile non déformée et on se demande quelles sont les modifications subies par celle-ci quand les ailerons sont braqués dans le même sens ou dans le sens contraire.

Considérons une aile quelconque AB (fig. 37), dont on a déterminé au préalable les coefficients $A_1, A_2, \dots, A_n$ pour une position quelconque, caractérisée par exemple par l'angle d'incidence β_0 de la section médiane. Ces coefficients sont fonction de β_0 et de β , qui est en général variable le long de l'envergure.

Supposons qu'entre les sections ξ_1 et ξ_2 de part et d'autre de la section médiane, l'aile est pourvue d'ailerons et que ceux-ci soient braqués d'un angle α par rapport à la position initiale. L'axe de portance nulle pour les sections de la partie aileronnée de l'aile change de direction est l'angle d'incidence initial β est augmenté (ou diminué selon que le braquage est positif ou négatif) de $\beta_a^{(1)}$, de sorte que l'angle total en chaque section est la somme des deux : $\beta + \beta_a$ (avec, bien entendu, $\beta_a = 0$ pour la partie de l'aile non aileronnée).

En nous rapportant au système d'équations (112'), nous remarquons que rien n'est changé, sauf le deuxième membre, auquel vient s'ajouter, à côté du terme initial $\mu\beta \sin \theta$, le terme $\mu\beta_a \sin \theta$. On en déduit facilement que le nouveau coefficient C_n de la série de Fourier est la somme de A_n , préalablement déterminé, et de B_n , dû exclusivement au braquage des ailerons : $C_n = A_n + B_n$. Pour déterminer $B_1, \dots, B_n$, il suffit alors de supposer $\beta = 0$ et de n'en tenir compte que de l'influence du braquage, β_a .

En pratique on a affaire à des ailes symétriques et symétriquement aileronnées. Par ailleurs l'angle de braquage des deux ailerons est le même, mais pourrait être de sens opposé. Si le sens est le même, les termes B_{2p+1} sont d'indices impairs ; si au contraire le sens est différent (cas fréquent dans l'aviation), les indices sont pairs, car, pour $\pm x$ [$2p\theta$ et $2p(\pi - \theta)$] les valeurs de la circulation sont égales et de signes contraires.

Dans ce dernier cas les moments M_{ay} et M_{oz} sont différents de zéro et leur rapport prend une expression particulièrement simple dans le cas

(1) La relation qui relie β_a avec α et le rapport $\frac{b}{l}$ de la partie mobile sur la corde du profil (fig. 37) a été donnée pour la première fois par M. Munk (*General theory of thin wing sections*, NACA, 142, 1922); cette relation pourrait être exprimée d'une manière générale par

$$\beta_a = \alpha \frac{2}{\pi} \left[\arcsin \sqrt{\frac{b}{l}} + \sqrt{\frac{b}{l} \left(1 - \frac{b}{l} \right)} \right].$$

d'une aile elliptique. En effet, le seul terme initial est A_1 , les autres, dus au braquage, sont d'indices pairs ; de sorte que, par application de la formule (118), on obtient la relation suivante, donnée pour la première fois par M. Munk.

$$(118') \quad \frac{M_{ay}}{M_{oz}} = \frac{3A_1B_2}{B_2} = 3A_1 = 3 \frac{C_z}{\pi\lambda}.$$

Comme pour le cas général, même s'il s'agit toujours d'une même aile, il faut reprendre les calculs chaque fois qu'on change l'un des paramètres ξ_1 , ξ_2 , ou la profondeur b de la partie mobile (fig. 37). De sorte qu'il n'y a pas une expression générale simple, même pour l'aile rectangulaire. Pour ce dernier cas, on trouvera dans un travail de M. Wieselsberger ⁽²⁾ le calcul complet pour l'allongement $\lambda = 2\pi$ et pour quelques valeurs de l'abscisse ξ_1 .

§ 3. — Aile d'envergure limitée en rotation uniforme autour d'un axe parallèle à l'envergure.

Dans le 4^e paragraphe du deuxième chapitre, nous avons étudié le mouvement autour d'une aile cylindrique indéfinie en rotation uniforme autour d'un axe parallèle à ses génératrices. Nous nous proposons maintenant de déterminer les conséquences du même mouvement appliqué dans le cas d'une aile d'envergure finie. Pour cela, nous allons supposer que les tourbillons libres, qui se détachent au bord de sortie de l'aile, forment une nappe cylindrique de hauteur égale à l'envergure de l'aile et concentrique à l'axe de rotation. Par raison de symétrie, les vitesses induites sur la nappe sont radiales et par conséquent normales à la nappe. Soit v cette vitesse en un point quelconque de l'envergure de l'aile, nous allons supposer (comme on l'a fait pour le cas de la translation uniforme) que l'angle d'incidence du profil est diminué de $\frac{v}{\omega h}$, en désignant par ω la vitesse angulaire et par h la distance du centre de l'aile à l'axe de rotation. Nous avons vu par ailleurs, pour le cas du mouvement plan, que la circulation est diminuée d'un terme approximativement proportionnel à $\frac{l}{4h}$; de sorte que, en désignant par β' l'angle de la vitesse périphérique ωh avec l'axe de portance nulle du profil correspondant à la translation uniforme, on pourrait écrire

$$\Gamma = k\omega h \left(\beta' - \frac{1}{4} \frac{l}{h} \right) = k\omega h \beta.$$

(²) C. Wieselsberger : *Theoretische Untersuchungen über die Querrüderwirkung beim Tragflügel*, Report of the Aeronautical Research Institute, Tôkiô Imperial University, No. 30 December, 1927 (Vol. II, 16.)

Tout se passe donc comme si, dans les nouvelles conditions du mouvement, l'axe de portance nulle du profil, défini précédemment, subissait une rotation égale à $\frac{1}{4} \frac{l}{h}$.

Dès lors, l'équation fondamentale est identique à l'expression (106),

$$\Gamma = k\omega h \left(\beta - \frac{v}{\omega h} \right),$$

et pour la résoudre nous emploierons la même méthode que dans le paragraphe précédent. Pour cela, il faut déterminer l'expression de la vitesse induite d'abord pour un anneau-tourbillon circulaire et ensuite pour la totalité des anneaux-tourbillons formant la nappe cylindrique.

1. Vitesse radiale due à un anneau-tourbillon circulaire. — Soit AB un anneau-tourbillon rapporté à un système d'axes $Oxyz$ et ayant un rayon

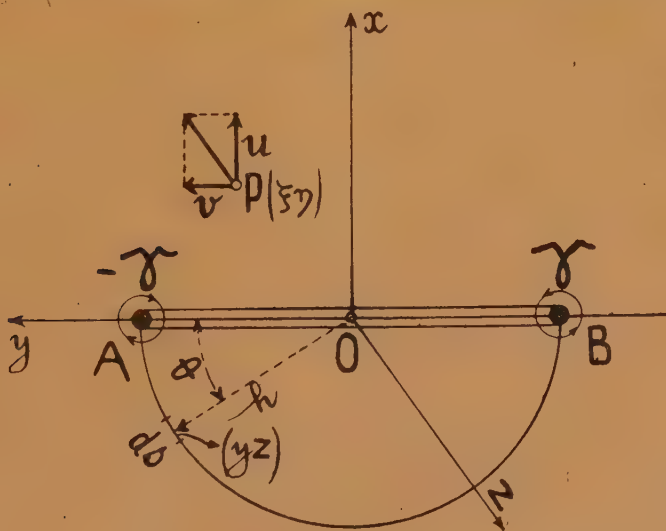


Fig. 38.

égal à h (fig. 38). Par raison de symétrie, les vitesses sont identiques dans tous les plans médians, de sorte qu'il suffit de les déterminer dans le plan Oxy , par exemple. En désignant par γ l'intensité tourbillonnaire, la vitesse radiale v — la seule qui nous intéresse d'ailleurs — sera, d'après la deuxième équation (27) :

$$v = u_\eta = \frac{-\gamma}{4\pi} \int_s \frac{\xi dz}{(\xi^2 + (y - \eta)^2 + z^2)^{3/2}}.$$

Par rapport à la variable θ , on pourra mettre $y = h \cos \theta$ et $z = h \sin \theta$; l'expression précédente devient alors :

$$v = \frac{-\gamma}{4\pi} \xi h \int_0^{2\pi} \frac{\cos \theta d\theta}{(\xi^2 + h^2 + \eta^2 - 2h\eta \cos \theta)^{3/2}} = \frac{-\gamma}{2\pi} \xi h \int_0^\pi \frac{\cos \theta d\theta}{(p^2 - q^2 \cos \theta)^{3/2}}$$

avec

$$p^2 = h^2 + \xi^2 + \eta^2 \quad \text{et} \quad q^2 = 2h\eta.$$

En remarquant d'abord qu'on a d'une part

$$\int \frac{\cos \theta d\theta}{(p^2 - q^2 \cos \theta)^{3/2}} = \frac{p^2}{q^2} \int \frac{d\theta}{(p^2 - q^2 \cos \theta)^{3/2}} - \frac{1}{q^2} \int \frac{d\theta}{(p^2 - q^2 \cos \theta)^{1/2}}$$

d'autre part

$$\int_0^\pi \frac{d\theta}{(p^2 - q^2 \cos \theta)^{3/2}} = \frac{1}{p^4 - q^4} \int_0^\pi (p^2 - q^2 \cos \theta) d\theta;$$

et en remplaçant ensuite θ par $\theta = \pi - 2\varphi$, on peut écrire

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \frac{\cos \theta d\theta}{(p^2 - q^2 \cos \theta)^{3/2}} &= -\frac{p^2}{q^2} \frac{2}{p^4 - q^4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (p^2 + q^2 - 2q^2 \sin^2 \varphi)^{1/2} d\varphi \\ &\quad + \frac{2}{q^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{(p^2 + q^2 - 2q^2 \sin^2 \varphi)^{1/2}} \end{aligned}$$

d'où, en désignant par

$$e^2 = \frac{2q^2}{p^2 + q^2} = \frac{4h\eta}{\xi^2 + (h + \eta)^2}$$

on obtient finalement pour v deux intégrales elliptiques de première et deuxième espèce :

$$(119) \quad v = \frac{\gamma}{2\pi} h \xi \left\{ \frac{2p^2}{q^2 \sqrt{p^2 + q^2} (p^2 - q^2)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi} d\varphi - \frac{2}{q^2 \sqrt{p^2 + q^2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}} \right\}$$

Sur un cylindre de rayon h , en remarquant qu'on a

$$p^2 = 2h^2 + \xi^2, \quad q^2 = 2h^2, \quad p^2 - q^2 = \xi^2 \quad \text{et} \quad p^2 + q^2 = 4h^2 + \xi^2,$$

et en désignant par E et K respectivement la première et deuxième intégrale, l'expression (119) devient :

$$v = \frac{\gamma}{2\pi} \frac{1}{\xi} \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\xi}{2h}\right)^2}} \left[\left(1 + 2\left(\frac{\xi}{2h}\right)^2\right) E - 2\left(\frac{\xi}{2h}\right)^2 K \right]$$

On a d'autre part

$$e^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{\xi}{2h}\right)^2} \quad \text{et} \quad e'^2 = 1 - e^2 = \frac{\left(\frac{\xi}{2h}\right)^2}{1 + \left(\frac{\xi}{2h}\right)^2}$$

et pour de petites valeurs de $\frac{\xi}{2h}$, le développement de E et de K , d'après Legendre ⁽¹⁾, est respectivement :

$$\begin{aligned} E &= 1 + \frac{1}{2} e'^2 \left(\log \frac{4}{e'} - \frac{1}{1.2} \right) + \frac{1^2.3}{2^2.4} e'^4 \left(\log \frac{4}{e'} - 1 + \frac{1}{3.4} \right) + \dots \\ K &= \log \frac{4}{e'} + \frac{1^2}{2^2} e'^2 \left(\log \frac{4}{e'} - 1 \right) + \frac{1^2.3^2}{2^2.4^2} e'^4 \left(\log \frac{4}{e'} - 1 + \frac{2}{3.4} \right) + \dots \end{aligned}$$

(1) Legendre, *Traité des fonctions elliptiques*, Paris, 1825.

En introduisant ces valeurs dans l'expression de la vitesse et en y remplaçant e' par sa valeur en fonction de $\left(\frac{\xi}{2h}\right)$, on peut se borner à un nombre convenable de termes et écrire :

$$(119) \quad \delta = \frac{\gamma}{2\pi} \frac{1}{\xi} - \frac{\gamma}{2\pi} \frac{1}{h} f\left(\frac{\xi}{2h}\right),$$

avec

$$f\left(\frac{\xi}{2h}\right) = 0,42\left(\frac{\xi}{2h}\right) + 0,92\left(\frac{\xi}{2h}\right)^3 - 0,25\left(\frac{\xi}{2h}\right) \log\left(\frac{\xi}{2h}\right) + 0,625\left(\frac{\xi}{2h}\right)^3 \log\left(\frac{\xi}{2h}\right),$$

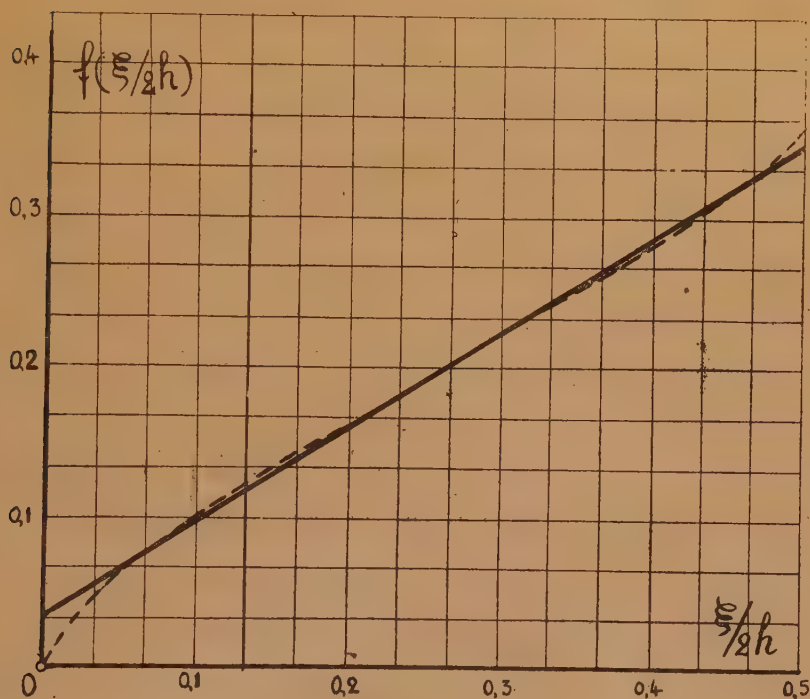


Fig 39

qui pourrait être remplacée approximativement, d'après le tableau ci-contre et la courbe qui la représente (fig. 39), par

$$f\left(\frac{\xi}{2h}\right) = 0,034 + 0,64\left(\frac{\xi}{2h}\right).$$

TABLEAU de $f\left(\frac{\xi}{2h}\right)$

$\left(\frac{\xi}{2h}\right)$	0	0,01	0,02	0,03	0,05	0,08	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,50
$f\left(\frac{\xi}{2h}\right)$	0	0,016	0,028	0,039	0,058	0,098	0,085	0,133	0,162	0,195	0,223	0,254	0,281	0,357

Nous remarquons ainsi, d'après (119'), que le premier terme de la vitesse est identique à l'action d'un tourbillon rectiligne indéfini et que le second terme seulement dépend du rayon de l'anneau tourbillon.

2. Vitesse induite totale et détermination des caractéristiques de l'aile — A la place d'un anneau tourbillon isolé, nous avons une nappe cylindrique composée d'anneaux élémentaires d'intensité tourbillonnaire égale à $\frac{d\Gamma}{dx} dx$. Nous allons faire l'hypothèse que l'aile n'a pas fait une révolution complète afin d'éviter les perturbations produites en aval de l'aile et que celle-ci aurait rencontrées si la rotation était de 2π . Dans ces conditions, il faut prendre la moitié de la valeur (119') de la vitesse, qui serait ainsi en accord avec le cas limite où h tend vers l'infini. En un point ξ de l'envergure, la vitesse induite devient successivement :

$$v = \frac{1}{4\pi} \int_B^A \frac{d\Gamma}{dx} \cdot \frac{dx}{\xi - x} - \frac{1}{4\pi h} \int_B^A \left[0,034 + 0,64 \left(\frac{\xi - x}{2h} \right) \right] \frac{d\Gamma}{dx} dx$$

$$= v' - \frac{0,08}{\pi h^2} \int_B^A \Gamma dx,$$

où v' représente la vitesse induite dans le cas de la translation rectiligne

Rapportons nous maintenant à l'expression générale de la résultante dans le cas du mouvement plan (n° 2, § 4, chap. II) :

$$R = \rho \omega h \Gamma - 2i\pi \omega \rho e^{i\gamma} \sum_{n=1}^n \frac{Q_n \bar{q}_n}{a^{2n}} - \rho \omega^2 A \bar{z}_0,$$

et, par analogie avec les cas traités précédemment, appelons *portance* le terme $\rho \omega h \Gamma$ dû à la circulation. On aura alors, en désignant par S la surface de l'aile,

$$\int_B^A \Gamma dx = \frac{1}{2} S \omega h C_z,$$

et on peut écrire finalement pour l'angle induit :

$$(120) \quad \varphi = \frac{v}{\omega h} = \frac{v'}{\omega h} - 0,04 \frac{L^2}{h^2} \frac{C_z}{\pi \lambda}.$$

Il s'ensuit que la distribution de la circulation est identique à celle du cas précédent (translation rectiligne) et que seul l'angle d'incidence géométrique en chaque section est augmenté de $0,04 \frac{L^2}{h^2} \frac{C_z}{\pi \lambda}$. L'angle induit total serait alors :

$$\beta_1 - \beta = (1 + \sigma) \frac{C_{z_0}}{\pi \lambda} - 0,04 \frac{L^2}{h^2} \frac{C_z}{\pi \lambda},$$

et le coefficient unitaire de la traînée :

$$C_x - C_{x_0} = (1 + \delta) \frac{C_z^2}{\pi \lambda} - 0,04 \frac{L^2}{h^2} \frac{C_z^2}{\pi \lambda}$$

Ces deux expressions se rapportent au terme de la résultante qui contient la circulation; pour avoir la résultante totale, il n'y a qu'à appliquer la formule précédente de R à un élément dx de l'aile et à intégrer le long de l'envergure. Nous avons voulu mettre principalement en évidence la presque identité qui existe entre le cas de la translation rectiligne et celui de la rotation uniforme quant à la distribution de la circulation. Par ailleurs, le terme $0,04 \frac{L^2}{h^2} \frac{C_z}{\pi\lambda}$ est négligeable et on peut ainsi appliquer à un élément d'aile en rotation uniforme les formules du mouvement plan, en prenant la même distribution de la circulation que dans le paragraphe précédent.

CHAPITRE IV

INFLUENCE DES PAROIS ET DES SURFACES LIBRES

Pour vérifier les propriétés des surfaces sustentatrices, on soumet celles-ci aux essais dans les tunnels, aux chariots ou aux manèges aérodynamiques. Les résultats que nous avons obtenus dans les chapitres précédents se rapportent à un fluide indéfini et ne peuvent pas ainsi être comparables aux vérifications expérimentales, tant que nous ne connaissons pas l'influence des parois rigides ou des surfaces libres, qui limitent le fluide dans nos moyens expérimentaux. Aussi, nous allons étudier dans ce chapitre cette influence pour le cas d'une veine plane et d'un courant à trois dimensions.

Soit pour cela φ le potentiel du mouvement dans le cas d'un fluide indéfini et Φ celui du même mouvement dans le cas où le fluide est limité. En désignant par φ_c un autre potentiel complémentaire, nous pouvons mettre

$$\Phi = \varphi + \varphi_c.$$

Sur les parois rigides, la composante de la vitesse normale à celles-ci est nulle et par conséquent

$$(121) \quad \frac{\partial \Phi}{\partial n} = \frac{\partial \varphi}{\partial n} + \frac{\partial \varphi_c}{\partial n} = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial n} = - \frac{\partial \varphi_c}{\partial n}.$$

Ainsi, pour tenir compte de l'influence des parois rigides, il faut ajouter au potentiel φ un autre potentiel complémentaire φ_c , tel que sur la paroi la relation (121) soit vérifiée.

Supposons que les surfaces soient libres; elles séparent le fluide en deux régions, l'une en mouvement, l'autre immobile. Dans cette dernière région la pression est partout constante y compris les surfaces de séparation. Il s'ensuit que la vitesse sur celle-ci est constante et égale à celle de l'infini où règne la même pression. Soit s une ligne de courant sur la surface libre, on aura

$$\frac{\partial \Phi}{\partial s} = W = C^te,$$

d'où, à une constante près,

$$(121') \quad \Phi - Ws = C \quad \text{ou} \quad \varphi - Ws = -\varphi_c.$$

La première relation nous montre que la différence géométrique entre la vitesse totale et W en un point de la surface libre est normale à celle-

ci. Quant à la seconde, elle nous indique que le potentiel complémentaire φ_c est égal et de signe contraire au potentiel des vitesses perturbatrices, qui représentent la différence entre les vitesses totales et la vitesse W du courant à l'infini.

Nous allons utiliser par la suite les relations (124) et (124').

§ 1. — Courant à deux dimensions.

Considérons un mouvement plan parallèle et limitons-nous à une portion du fluide séparée par deux cloisons fictives parallèles au plan directeur ; le mouvement n'est nullement changé si on suppose que les cloisons se sont brusquement solidifiées. Pratiquement, cela correspond au courant créé autour d'un tronçon du solide cylindrique limité à chaque extrémité par deux parois planes très étendues, dont l'installation est couramment réalisée dans les laboratoires aérodynamiques.

Cette *veine fluide* est limitée supérieurement et inférieurement par les surfaces libres ou rigides, dont nous allons déterminer plus bas les influences respectives.

1. Influence du sol. — Soit s la surface du sol et h la hauteur que nous allons supposer très grande par rapport à la profondeur de l'aile. Il est

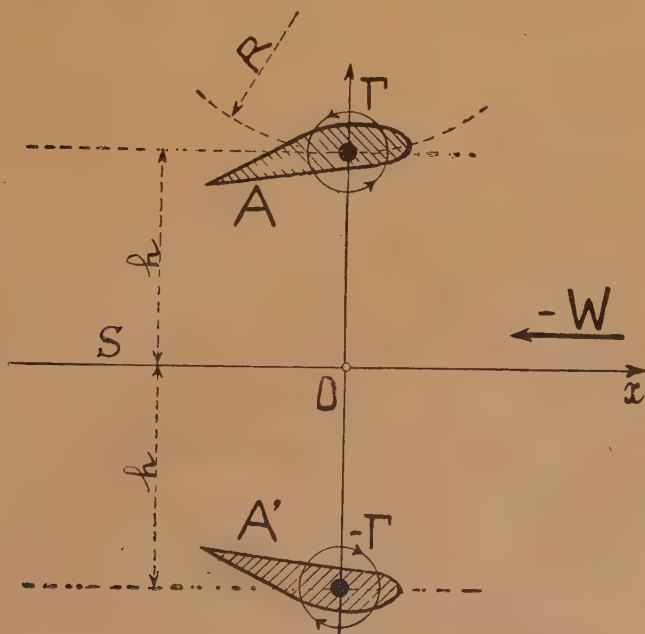


Fig. 40.

évident que la condition (121) est automatiquement réalisée sur la surface S du sol si à l'action de l'aile A vient s'ajouter celle de son image

en A' par rapport à S (fig. 40). Avec une approximation suffisante, nous pouvons remplacer les deux ailes A et A' par deux tourbillons de même circulation et écrire :

$$f(z) = -Wz - \frac{i\Gamma}{2\pi} \log \frac{z - ih}{z + ih}, \quad \frac{df}{dz} = -W - \frac{i\Gamma}{2\pi} \left[\frac{1}{z - ih} - \frac{1}{z + ih} \right].$$

Tout se passe comme si le tourbillon représentant l'aile était placé dans un courant de vitesse

$$w = -W + \frac{i\Gamma}{2\pi} \frac{1}{z + ih},$$

dont la valeur au droit de l'aile est égale à

$$W - \frac{\Gamma}{4\pi h} \approx W \left(1 - \frac{C_z}{8\pi} \frac{l}{h} \right).$$

Ce courant est incurvé et le rayon de courbure R sera donné par

$$\begin{aligned} \frac{1}{R} &\approx \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{v}{W} \right) = p. \text{ im. } \frac{1}{W} \left(\frac{\partial u}{\partial x} - i \frac{\partial v}{\partial x} \right) \\ &= p. \text{ im. } \frac{1}{W} \frac{dw}{dz} = \frac{+\Gamma}{2\pi W h^2}. \end{aligned}$$

La concavité de la courbe est vers le haut et le centre de courbure est sur l'axe Oy . Le mouvement serait équivalent à un mouvement relatif par rapport à l'aile en rotation uniforme autour du centre de courbure. Par analogie au mouvement étudié précédemment (n° 2, § 4, chap. II), la circulation Γ , ainsi qu'elle est notée sur la fig. 40 se trouve *augmentée* d'un angle égal à

$$\frac{1}{4} \frac{l}{R} = \frac{\Gamma}{8\pi} \frac{l}{Wh^2} \approx \frac{P}{\frac{\rho}{2} W^2 l} \cdot \frac{1}{16\pi} \frac{l^2}{h^2} = \frac{1}{16\pi} \frac{l^2}{h^2} C_z.$$

Par ailleurs une diminution de la circulation est due à la diminution de la vitesse au droit de l'aile, de sorte que la portance devient finalement :

$$\begin{aligned} P &= \rho \left(W - \frac{\Gamma}{4\pi h} \right) \Gamma = \rho k l W^2 \left(1 - \frac{\Gamma}{4\pi h W} \right)^2 \left(\beta + \frac{1}{4} \frac{l}{R} \right) \\ &\approx \rho k l W^2 \beta \left[1 - \frac{C_z}{\pi} \frac{l}{4h} + \frac{C_z}{\pi \beta} \left(\frac{l}{4h} \right)^2 \right]. \end{aligned}$$

En désignant plus loin par $C_z(\infty) = 2k\beta$ le coefficient de portance unitaire dans le cas d'un fluide indéfini, l'influence du sol se manifeste par une diminution de C_z :

$$(122) \quad C_z \approx \frac{C_z(\infty)}{1 + \frac{C_z(\infty)}{\pi} \frac{l}{4h} - \frac{C_z(\infty)}{\pi \beta} \left(\frac{l}{4h} \right)^2}.$$

Nous remarquons qu'il n'y a pas de traînée parce que au droit de l'aile il n'y a pas de vitesse suivant oy .

2. Veine limitée par des parois rigides ou surfaces libres. — En remplaçant toujours l'aile par un tourbillon unique, il est facile de voir qu'une

série indéfinie d'images disposées comme dans la figure 41 a, avec des circulations alternativement positives et négatives, donne des vitesses tangentielle à la paroi. En effet, en un point P les vitesses normales sont deux à deux égales et de signes contraires.

La même disposition, avec toutefois des circulations de même sens,

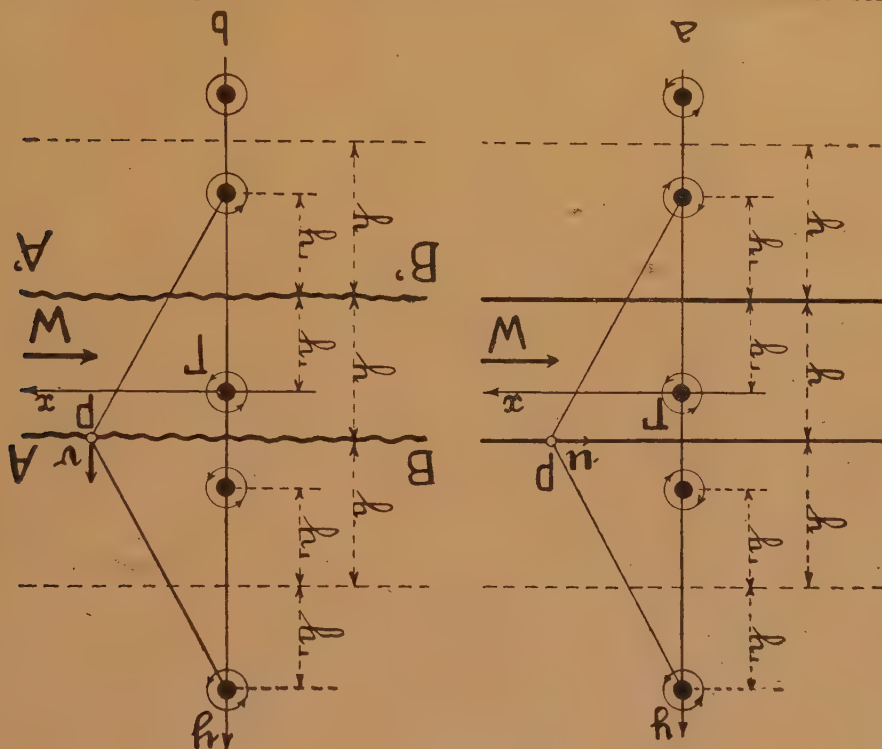


Fig. 41.

correspond aux surfaces libres (fig. 41 b), car en un point P de celle-ci les vitesses dues à la série indéfinie de tourbillons sont normales. Ceci est en accord avec la condition (121'). Nous remarquons cependant qu'en toute rigueur les surfaces libres ne restent ni rectilignes, ni parallèles à la vitesse W ; mais, pour une approximation du premier ordre, nous pouvons négliger la déformation.

L'expression de la vitesse complexe pourrait être exprimée par une fonction hyperbolique ⁽¹⁾.

$$\frac{df}{dz} = W - \frac{i\Gamma}{4h} \coth \frac{\pi z}{2h} \pm \frac{i\Gamma}{4h} \coth \frac{\pi(z + 2ih_1)}{2h},$$

où on prend le signe + ou - selon que les surfaces sont rigides ou libres. Le tourbillon portant serait ainsi placé dans un courant fictif

$$w = \frac{df}{dz} + \frac{i\Gamma}{2\pi} \frac{1}{z}.$$

⁽¹⁾ E. Jahnke und F. Emde : *Funktionentafeln*, page 7 et 18, Leipzig et Berlin, 1909.

dont la valeur au droit de l'aile est la limite de W pour $z = 0$:

$$\lim_{z=0} w = -W \pm \frac{\Gamma}{4h} \cot \frac{h_1}{h} \pi.$$

Comme dans le cas précédent, le courant est incurvé et le rayon de courbure au droit de l'aile est

$$\begin{aligned} \frac{1}{R} &= -\frac{1}{W} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)_{z=y=0} = p. \lim_{z=0} \frac{1}{W} \left(\frac{dw}{dz} \right)_{z=0} \\ &= -p. r. \frac{\pi \Gamma}{8Wh^2} \left\{ \frac{1}{\sin^2 \left(\frac{i\pi z}{2h} \right)} \mp \frac{1}{\sin^2 \left(\frac{i\pi z}{2h} - \frac{h_1}{h} \pi \right)} + \left(\frac{2h}{\pi z} \right)^2 \right\}_{z=0} \\ &= -\frac{\pi \Gamma}{8Wh^2} \left(\frac{1}{3} \mp \frac{1}{\sin^2 \frac{h_1}{h} \pi} \right). \end{aligned}$$

Si l'aile est au centre de la veine ($h_1 = \frac{h}{2}$), la vitesse au droit de l'aile est égale à celle du courant à l'infini. Quant à la courbure, nous allons séparer les deux cas :

a) Pour les parois rigides, on pourra écrire

$$\frac{1}{R} = \frac{\pi \Gamma}{12Wh^2} \quad \text{et} \quad \frac{1}{4} \frac{l}{R} = \frac{\pi}{24} \frac{l^2}{h^2} C_x.$$

La concavité est toujours vers le haut et la circulation est augmentée de l'angle $\frac{1}{4} \frac{l}{R}$:

$$\Gamma = klW \left(\beta + \frac{\pi}{48} \frac{\Gamma l}{Wh^2} \right) = \frac{klW\beta}{1 - \frac{k\pi}{48} \frac{l^2}{h^2}} \approx klW\beta \left[1 + \frac{k\pi}{48} \frac{l^2}{h^2} \right].$$

On aura plus loin

$$\begin{aligned} P &= \rho W \Gamma = \rho klW^2 \beta \left(1 + \frac{k\pi}{48} \frac{l^2}{h^2} \right), \\ (123) \quad C_x &= 2k\beta \left(1 + \frac{k\pi}{48} \frac{l^2}{h^2} \right) = \left(1 + \frac{k\pi}{48} \frac{l^2}{h^2} \right) C_{x(\infty)}, \end{aligned}$$

et, pour la même valeur de C_x , une différence d'angle entre le cas du fluide limité et celui indéfini :

$$(123') \quad \beta_1 - \beta = C_x \left[\frac{1}{2k} \left(1 - \frac{k\pi}{48} \frac{l^2}{h^2} \right) - \frac{1}{2k} \right] = -\frac{\pi}{96} \frac{l^2}{h^2} C_x.$$

b) Pour les surfaces libres le rayon de courbure devient

$$\frac{1}{R} = -\frac{\pi \Gamma}{6Wh^2} \quad \text{et} \quad \frac{1}{4} \frac{l}{R} = -\frac{\pi}{12} \frac{l^2}{h^2} C_x.$$

La concavité des lignes de courant est vers le bas et de ce fait la circulation est diminuée de l'angle $\frac{1}{4} \frac{l}{R}$:

$$\Gamma = klW \left(\beta - \frac{1}{4} \frac{l}{R} \right) \approx klW\beta \left(1 - \frac{k\pi}{24} \frac{l^2}{h^2} \right).$$

Regardons maintenant ce qui se passe à l'infini aval ou amont : la vitesse de perturbation y est, en supposant toujours $h_1 = \frac{h}{2}$,

$$\begin{aligned} \lim_{z=\pm\infty} w &= \frac{-i\Gamma}{4h} \left\{ \coth \frac{\pi z}{2h} \mp \coth \left(\frac{\pi z}{2h} + \frac{\pi}{2} \right) \right\}_{z=\pm\infty} \\ &= \frac{-i\Gamma}{4h} \left(\frac{e^{-\frac{i\pi z}{2h}} + e^{\frac{i\pi z}{2h}}}{e^{-\frac{i\pi z}{2h}} - e^{\frac{i\pi z}{2h}}} \mp \frac{e^{-\frac{i\pi z}{2h} + \frac{\pi}{2}} + e^{\frac{i\pi z}{2h} - \frac{\pi}{2}}}{e^{-\frac{i\pi z}{2h} + \frac{\pi}{2}} - e^{\frac{i\pi z}{2h} - \frac{\pi}{2}}} \right)_{z=\pm\infty} \\ &= \frac{-i\Gamma}{4h} \left\{ (\mp 1) \mp (\mp 1) \right\}. \end{aligned}$$

La vitesse perturbatrice est dirigée suivant Oy ; elle est nulle dans le cas des parois rigides et respectivement

$$v = \pm \frac{\Gamma}{2h} = \pm \frac{P}{2\rho W h} = \pm \frac{W}{4} \frac{l}{h} C_s$$

pour l'infini amont et aval dans le cas des surfaces libres.

On aurait pu trouver facilement cette dernière valeur en prenant la circulation le long de contour $ABB'A'$ (fig. 41 b), dont les deux côtés AB et $A'B'$ sont rejetés respectivement à l'infini amont et aval.

Ainsi, à l'infini les lignes de courant sont inclinées sur la direction de la vitesse W d'un angle τ tel que

$$\operatorname{tg} \tau \approx \tau = \frac{v}{W} = \frac{\Gamma}{2Wh}.$$

En pratique, une partie des lignes $AOBC$ et $A'B'O'C'$ est constituée par

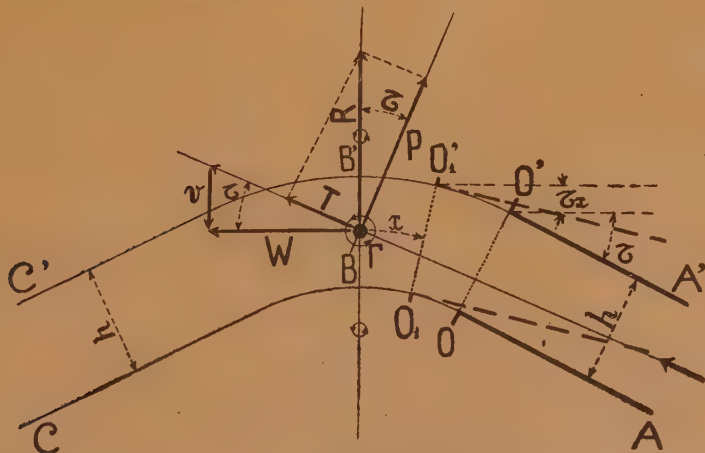


Fig. 41.

des parois rigides, dont l'ouverture est en OO' . Comme par ailleurs toutes les mesures sont faites par rapport à une direction parallèle aux parois du tunnel (AO ou $A'O'$), qui sont généralement horizontales ; et que la vitesse de référence est celle mesurée dans le tunnel ; donc parallèle à

l'axe de celui-ci, il est nécessaire de décomposer la résultante (fig. 42) en une portance et une traînée :

$$P = \rho W \Gamma \cos \tau = \rho W \Gamma$$

$$T = \rho W \Gamma \sin \tau = \rho W \Gamma \tau = \rho v \Gamma = \rho \frac{\Gamma^2}{2h} = \frac{P^2}{2\rho W^2 h}.$$

L'angle τ tient place d'angle induit — il s'appelle d'ailleurs angle induit —, de sorte qu'on peut écrire finalement

$$(124) \quad \begin{cases} \tau = \varepsilon_1 - \beta = \frac{1}{4} \frac{l}{h} C_z \\ C_x = C_{x_0} + \frac{1}{4} \frac{l}{h} C_z^2. \end{cases}$$

Les formules précédentes sont valables tant que l'aile est à une grande distance de l'ouverture du tunnel. Mais si cette distance est faible, il y a à remplacer l'angle τ par un autre τ_x , tel que

$$\tau_x = \frac{v_x}{W},$$

où v_x représente la vitesse de perturbation dans la section de l'ouverture du tunnel en O_1 ou O'_1 (paroi supérieure ou inférieure). En supposant toujours que l'aile est au centre de la veine ($h_1 = \frac{1}{2} h$), l'expression de la vitesse complexe de perturbation devient :

$$w = \frac{-i\Gamma}{2h} \coth \frac{\pi z}{h},$$

d'où, en remplaçant z par $z = x + i \frac{h}{2}$, on obtient

$$v_x = \frac{\Gamma}{2h} \coth \left(\frac{\pi x}{h} + i \frac{\pi}{2} \right) = \frac{\Gamma}{2h} \operatorname{tgh} \frac{\pi x}{h},$$

et finalement :

$$(124') \quad \begin{cases} \tau_x = \frac{v_x}{W} = \frac{1}{4} \frac{l}{h} C_z \times \operatorname{tgh} \frac{\pi x}{h} \\ C_x = C_{x_0} + \frac{1}{4} \frac{l}{h} C_z^2 \times \operatorname{tgh} \frac{\pi x}{h} \end{cases}$$

Le tableau suivant nous donne $\operatorname{tgh} \frac{\pi x}{h}$ en fonction de $\frac{x}{h}$:

TABLEAU de $\operatorname{tgh} \frac{\pi x}{h}$

$\frac{x}{h}$	0	0,10	0,15	0,20	0,25	0,40	0,50
$\operatorname{tgh} \frac{\pi x}{h}$	0	0,31	0,44	0,56	0,64	0,85	0,92

On voit que l'influence de la distance x est négligeable dès qu'elle dépasse la moitié de la hauteur du tunnel. Il faut remarquer cependant,

que les formules (124') peuvent être légèrement en défaut si la veine fluide à la sortie, en O , et O' , est perturbée par le frottement sur une hauteur appréciable à partir des parois du tunnel.

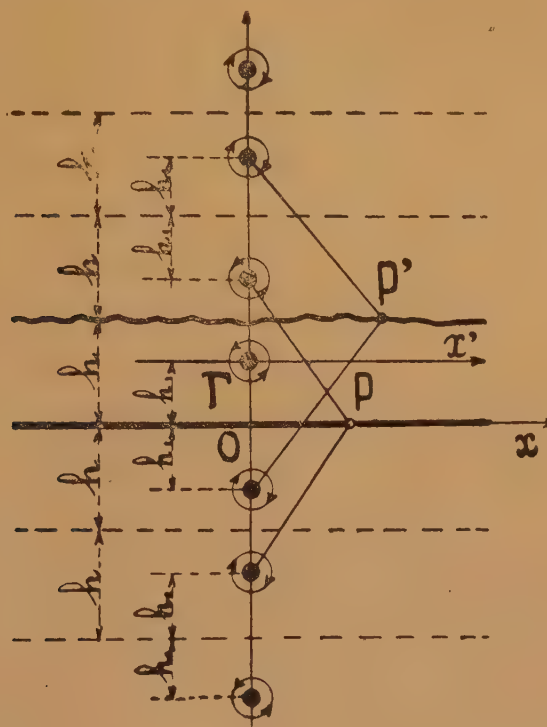


Fig. 43.

c) La disposition de la figure 43 représente la solution dans un cas mixte : paroi rigide et surface libre. L'expression des vitesses perturbatrices dues à la série indéfinie d'images est

$$\frac{df}{dz} + W = \frac{-i\Gamma}{4h} \left\{ \frac{1}{\sinh \frac{\pi(z - ih_1)}{2h}} - \frac{1}{\sinh \frac{\pi(z + ih_1)}{2h}} \right\}.$$

La vitesse totale et la courbure du courant au droit de l'aile sont respectivement :

$$W = \frac{\Gamma}{4h} \cdot \frac{1}{\sin \frac{h_1}{h} \pi} \quad \text{et} \quad \frac{1}{R} = - \frac{\Gamma \pi}{12 h^2 W} \left[1 - \frac{3}{2} \frac{\cos \frac{h_1}{h} \pi}{\sin^2 \frac{h_1}{h} \pi} \right].$$

§ 2. — *Courant à trois dimensions.*

Presque toutes les souffleries aérodynamiques représentent un courant limité par des parois cylindriques rigides ou libres, dont l'axe est parallèle au courant général.

Pour les surfaces libres, on néglige la déformation en supposant que les génératrices de ces surfaces restent constamment parallèles à l'axe du tunnel.

Supposons que l'aile est rapportée à un système d'axes $Oxyz$, défini dans la figure 35, et que Oz soit placé dans l'axe du tunnel. La vitesse W du courant général est donc dirigée suivant la direction positive de Oz . Aux parois du tunnel, qui sont également parallèles à Oz , nous avons à remplir les conditions (121) et (121').

La première pour les parois rigides, la deuxième pour les surfaces libres. Le potentiel φ représente le mouvement dans un fluide indéfini et peut être décomposé en deux parties : l'une, due à la vitesse générale W , a comme expression Wz , et l'autre représente les vitesses perturbatrices dues à l'aile et aux tourbillons libres dont celle-ci est accompagnée. On peut mettre ainsi

$$\varphi = Wz + \varphi'$$

et les conditions susmentionnées deviennent respectivement :

$$(125) \quad \frac{\partial \varphi'}{\partial n} = -\frac{\partial \varphi_c}{\partial n}, \quad \varphi' + Wz - Ws \stackrel{\infty}{=} \varphi' = -\varphi_c.$$

Nous avons supposé dans la deuxième relation, que les lignes de courant sur les parois libres sont sensiblement parallèles à Oz , c'est-à-dire $s \stackrel{\infty}{=} z$.

Ainsi par conséquent, si on connaît le potentiel des vitesses perturbatrices, on en déduit, d'après (125), le potentiel complémentaire φ_c , qui tient compte de l'influence des parois.

Considérons maintenant une droite indéfinie, parallèle à Oz , et étudions la variation du potentiel perturbateur le long de cette direction. Il est évident qu'à l'infini *amont* ce potentiel est uniforme et constant ou nul, car l'influence de l'aile et des tourbillons libres s'évanouit. Par contre, à l'infini *aval* le potentiel perturbateur est dû exclusivement à la nappe des tourbillons libres et partant, le mouvement qu'il représente est plan. Il est indépendant par conséquent du décalage des éléments de l'aile dans le sens de la vitesse générale. On peut alors annuler ce décalage, sans que cela modifie la résistance induite, et supposer l'aile alignée suivant une direction, que nous avons prise pour axe Ox (normal à l'axe du tunnel).

La dérivée $\frac{\partial \varphi'}{\partial z}$ du potentiel perturbateur suivant la direction que nous avons considérée plus haut est égale à la composante w de la vitesse perturbatrice en chaque point, de cette droite. Si nous assimilons l'aile à un tourbillon portant unique parallèle à Ox , il est facile de voir que cette vitesse est exclusivement due à celui-ci. De ce fait, la valeur de la vitesse est la même pour $\pm z$. Il s'ensuit que la valeur de φ' à l'infini

est deux fois celle correspondant au point $z=0$, dans le plan de l'aile.

En effet, d'après $\frac{\partial \varphi'}{\partial z} = w$, on aura

$$(\varphi')_{+\infty} = \int_{-\infty}^{+\infty} w dz = \int_{-\infty}^0 w dz + \int_0^{+\infty} w dz = 2 \int_{-\infty}^0 w dz = 2(\varphi')_0.$$

Ainsi par conséquent, il suffit de connaître le potentiel des vitesses perturbatrices à l'infini, pour en déduire celui qui nous intéresse, au droit de l'aile. Il en sera de même pour le potentiel complémentaire φ_c que nous cherchons, ainsi que pour les vitesses complémentaires correspondantes. Si ces vitesses sont $2u_c$ et $2v_c$ à l'infini aval, elles seront u_c et v_c au droit de l'aile.

La détermination de φ_c à l'infini aval est un problème du mouvement plan, que nous allons résoudre au moyen des relations (125), appliquées sur le contour de la section droite du tunnel.

1. Tunnel circulaire. — Soit R le rayon du tunnel et supposons que l'envergure de l'aile est suivant un diamètre. Au point x l'intensité

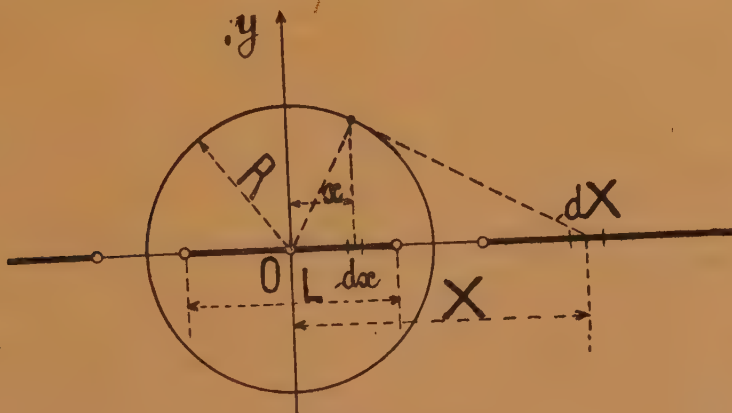


Fig. 44.

tourbillonnaire d'une lanière élémentaire dx est $\frac{d\Gamma}{dx} dx$. Très loin en aval, le contour circulaire de la section droite du tunnel doit être une ligne de courant dans le cas du tunnel fermé et une ligne équipotentielle dans celui de la veine libre. Si nous désignons par $X = \frac{R^2}{x}$ l'image du point x par rapport au cercle et par $\frac{dG}{dX} dX$ l'intensité tourbillonnaire d'une autre lanière dX conjuguée à la première (fig. 43), les conditions sus mentionnées sont réalisées quand on a respectivement

$$(126) \quad \frac{dG}{dX} dX = \mp \frac{d\Gamma}{dx} dx$$

et par conséquent

$$(126') \quad G = \mp \Gamma.$$

En effet, en prenant le signe moins, les deux tourbillons conjugués en x et X donnent sur le contour du cercle une vitesse résultante tangentielle. Si le signe est le même, en ajoutant au centre du cercle un autre tourbillon de même intensité, mais de signe contraire, les vitesses résultantes sont toutes normales au contour du cercle. Comme par ailleurs l'aile est supposée symétrique par rapport au centre du tunnel, les tourbillons complémentaires du centre se détruisent deux à deux et il ne reste en définitif que les relations (126) et (126').

Ainsi donc le potentiel complémentaire φ_c est dû à une nappe de tourbillons s'étendant, d'une part et d'autre du tunnel, jusqu'à l'infini aval. Tout se passe comme s'il y avait, des deux côtés du tunnel, deux ailes images indéfinies, dont la circulation en chaque point serait en valeur absolue égale à la circulation autour de l'aile réelle, au point-image correspondant.

La vitesse induite complémentaire v_c au point ξ de l'aile sera donnée par

$$v_c = -\frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dG}{dX} \frac{dX}{X-\xi} = \pm \frac{1}{4\pi} \int_B^A \frac{d\Gamma}{dx} \frac{R^2}{\frac{x}{x}-\xi}$$

et la résistance induite complémentaire

$$T_c = \rho \int_B^A \Gamma v_c dx.$$

Pour une distribution elliptique de la circulation, on obtient les résultats suivants donnés par Prandtl ⁽¹⁾ :

$$v_c = \pm \frac{P}{4\pi R^2 \rho W} \left[1 + \frac{3}{4} \left(\frac{2x}{D} \cdot \frac{L}{D} \right)^2 + \frac{5}{8} \left(\frac{2x}{D} \cdot \frac{L}{D} \right)^4 + \frac{35}{128} \left(\frac{2x}{D} \cdot \frac{L}{D} \right)^6 \right]$$

$$T_c = \mp \frac{P}{4\pi R^2 \rho W^2} \left[1 + \frac{3}{16} \left(\frac{L}{D} \right)^4 + \frac{5}{64} \left(\frac{L}{D} \right)^8 + \dots \right]$$

où D représente le diamètre du tunnel, L l'envergure de l'aile et P la portance totale. En désignant par S la surface de l'aile et par Σ celle de la section du tunnel, on pourra écrire encore respectivement :

$$(127) \quad \begin{cases} \frac{v_c}{W} = \pm \frac{C_z}{8} \frac{S}{\Sigma} \left[1 + \frac{3}{4} \left(\frac{2x}{D} \cdot \frac{L}{D} \right)^2 + \dots \right] \\ C_{x(c)} = \mp \frac{C_z^2}{8} \cdot \frac{S}{\Sigma} \left[1 + \frac{3}{16} \left(\frac{L}{D} \right)^4 + \dots \right] \end{cases}$$

Le premier signe se rapporte au tunnel fermé, le second au tunnel ouvert.

REMARQUE. — Si on considère que la répartition de la circulation le long

(1) L. Prandtl, *loc. cit.*

de l'envergure est uniforme, les tourbillons libres se réduisent en deux tourbillons extrêmes ; mais l'influence des parois cependant ne diffère des résultats précédents que par le second terme de l'expression entre parenthèses. Pratiquement donc, la loi de la répartition de la circulation n'influe pas beaucoup sur les interactions des parois exprimées par les expressions (127).

2. Tunnel rectangulaire. — La section droite du tunnel est un rectangle de côtés b et h . Les parois peuvent être entièrement ou partiellement rigides ; aussi nous allons étudier les trois cas suivants : a) parois entièrement rigides, b) parois horizontales rigides et surfaces latérales libres, c) surfaces horizontales libres et parois latérales rigides. Le cas des surfaces totalement libres ne pourrait pas être envisagé, car les déformations de ces surfaces peuvent prendre des valeurs très élevées et la section, même en première approximation, ne reste pas rectangulaire.

Soit L l'envergure de l'aile supposée au centre du tunnel et Γ la circulation, qui est en réalité variable le long de l'envergure. Pour simplifier,

L'expression précédente s'écrit encore

$$w_n = (\mp 1)^n \frac{-i\Gamma}{b} \frac{\sin \pi \frac{L}{b}}{\cos \pi \frac{L}{b} - \cosh \left(2\pi n \frac{h}{b} + i \frac{\pi z}{b} \right)}$$

et la vitesse totale au point $z = 0$:

$$(128) \quad w = u - iv = \frac{-i\Gamma}{b} \sum_{-\infty}^{+\infty} (\mp 1)^n \frac{\sin \pi \frac{L}{b}}{\cos \pi \frac{L}{b} - \cosh 2\pi n \frac{h}{b}}$$

Pour avoir la vitesse de perturbation seule (w_c), il faut retrancher la vitesse induite due aux tourbillons propres de l'aile :

$$w_a = \frac{-i\Gamma}{2\pi} \cdot \left(\frac{1}{z - \frac{L}{2}} - \frac{1}{z + \frac{L}{2}} \right) = \frac{-i\Gamma L}{2\pi} \cdot \frac{1}{z^2 - \left(\frac{L}{2} \right)^2}$$

et par conséquent

$$w_c = u_c - iv_c = w - w_a.$$

Au droit de l'aile cette vitesse se réduit à la moitié ; d'autre part la composante verticale v_c , la seule qui nous intéresse, ne varie pas beaucoup le long de l'envergure, de manière qu'on peut prendre la valeur de cette vitesse correspondant au centre de l'aile. A ce point les vitesses horizontales sont nulles, d'après (128), et on pourra écrire :

$$(128') \quad \frac{v_c}{W} = \frac{\Gamma}{2bW} \left\{ \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{(\mp 1)^n \sin \pi \frac{L}{b}}{\cos \pi \frac{L}{b} - \cosh 2\pi n \frac{h}{b}} + \frac{2}{\pi} \frac{b}{L} \right\}$$

ou, en désignant par λ la quantité entre parenthèses, par S et Σ la surface de l'aile et la section du tunnel, l'angle induit et la trainée induite complémentaires deviennent respectivement :

$$(129) \quad \frac{v_c}{W} = \frac{\lambda}{4} \frac{h}{L} \cdot \frac{S}{\Sigma} C_x, \quad C_{x(c)} = -\frac{\lambda}{4} \frac{h}{L} \frac{S}{\Sigma} C_x^2.$$

on peut supposer que cette circulation est constante et de cette manière on aura aux extrémités des ailes deux tourbillons libres qui s'étendent jusqu'à l'infini aval.

Il est facile de voir que les conditions à la paroi, respectivement pour chacun des trois cas, sont satisfaites si on a une double série indéfinie de tourbillons disposés comme dans la figure 45 (a , b et c).

En désignant par n le numéro d'ordre d'une colonne horizontale, les vitesses dues à la série de tourbillons correspondant à cette colonne, peuvent s'exprimer pour les cas a et c par la fonction :

$$w_n = (\mp 1)^n \frac{-i\Gamma}{2b} \left\{ \cot \frac{\pi}{2} \left(z - inh - \frac{L}{2} \right) - \cot \frac{\pi}{b} \left(z - inh + \frac{L}{2} \right) \right\},$$

où le signe $-$ correspond au premier cas, le signe $+$ au troisième. En effet, à un changement d'axes près, la disposition des tourbillons est identique à celle de la figure 41 a , dont nous nous sommes occupé dans le cas d'une veine plane; par suite de la nouvelle orientation des axes de coordonnées, la fonction hyperbolique devient une fonction circulaire.

A titre d'exemple, nous donnons le tableau suivant de $\frac{\lambda}{4} \frac{h}{L}$ pour les valeurs 0,5 et 0,75 de $\frac{L}{b}$.

TABLEAU

$\frac{L}{b} = 0,50$	$\frac{h}{b}$		$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	2	4	
	$\frac{h}{L}$	a	0,112	0,113	0,114	0,140	0,270	0,540	
	$\frac{\lambda}{4}$	c	—0,088	0,025	0,078	0,130	0,270	0,540	
	c' coef. résult.		—0,340	—0,225	—0,172	—0,120	0,020	0,290	
$\frac{L}{b} = 0,75$	$\frac{h}{L}$		a	0,063	0,090	0,110	0,150	0,290	0,580
	$\frac{\lambda}{4}$	c	—0,010	0,053	0,095	0,140	0,290	0,580	
	c coef. résult.		—0,260	—0,197	—0,155	—0,110	0,040	0,330	

En comparant ces résultats avec ceux obtenus par M. Glauert ⁽¹⁾ pour

(1) Glauert, *loc. cit.*, page 196.

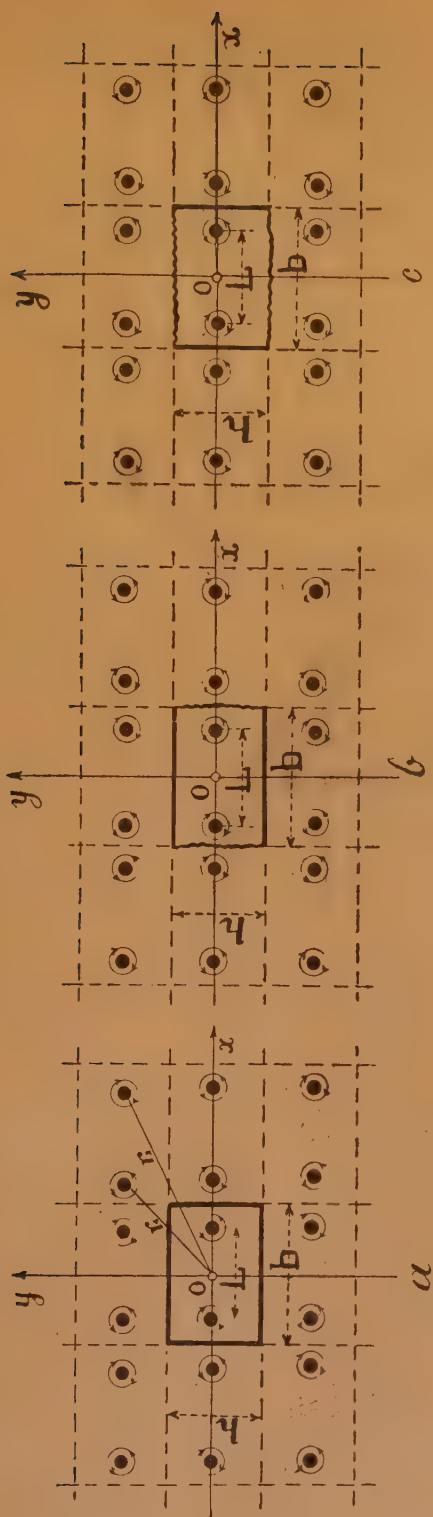


Fig. 45.

un tunnel complètement fermé, nous remarquons qu'il n'y a de désaccord sensible que pour les petits rapports de $\frac{h}{b}$. Cela tient à ce que, dans sa méthode, M. Glauert n'a pas tenu compte ni du rapport $\frac{h}{L}$, ni de $\frac{b}{L}$. Il apparaît nécessaire dans ce cas d'appliquer la formule (128') qui en tient compte. Par ailleurs, elle s'applique au tunnel partiellement ouvert (c) et est susceptible d'être plus rigoureuse, si au lieu de prendre la valeur de la vitesse induite au centre, on en prend une valeur moyenne, déduite par intégration de la vitesse le long de l'envergure.

Au sujet du tunnel à surfaces horizontales libres, il faut remarquer que la vitesse perturbatrice à l'infini due aux images du tourbillon portant, n'est pas nulle. En effet, d'après le théorème de la quantité de mouvement, on aura

$$P = \rho W \Gamma L = -\rho b h W (v_{-\infty} - v_{\infty}).$$

Par raison de symétrie $v_{\infty} = -v_{-\infty}$, d'où

$$\frac{v_{-\infty}}{W} = -\frac{\Gamma}{2h} \cdot \frac{L}{b} = -\frac{1}{4} \frac{S}{\Sigma} C_z.$$

Ce résultat est identique à celui trouvé pour la veine plane à surfaces libres (Ch. IV, § 1, n° 2, b) et les conclusions sont les mêmes. Ainsi, *outre les coefficients d'angle et de traînée induits représentés par les formules (129), il faut tenir compte du nouvel angle induit trouvé plus haut. Dans la quatrième et huitième colonne du tableau précédent nous avons donné, pour le troisième cas (c), le coefficient résultant.*

Pour le tunnel à surfaces latérales libres (deuxième cas, b) les vitesses dues à la série de tourbillons de la colonne n^{me} ont comme expression :

$$w_n = (-1)^n \frac{\Gamma}{2b} \left\{ \frac{1}{\sinh \frac{\pi \left(iz + nh - i \frac{L}{2} \right)}{b}} - \frac{1}{\sinh \frac{\pi \left(iz + nh + i \frac{L}{2} \right)}{b}} \right\},$$

et par suite, la vitesse perturbatrice totale au centre de l'aile sera

$$(130) \quad \frac{v_c}{W} = \frac{-\Gamma}{bW} \left\{ \sum_{-\infty}^{+\infty} (-1)^n \frac{\sin \frac{\pi}{2} \cdot \frac{h}{L} \cosh n\pi \frac{h}{b}}{\cos \pi \frac{L}{b} - \cosh 2n\pi \frac{h}{b}} - \frac{1}{\pi} \frac{b}{L} \right\}.$$

En désignant, comme auparavant, la quantité entre parenthèses par λ , on pourra écrire finalement :

$$(130') \quad \frac{v_c}{W} = -\frac{\lambda}{2} \frac{h}{L} \frac{S}{\Sigma} C_z \quad \text{et} \quad C_{x(c)} = \frac{\lambda}{2} \frac{h}{L} \frac{S}{\Sigma} C_z^2.$$

REMARQUE. — Pour effectuer les sommes $\sum_{-\infty}^{+\infty}$ des expressions (128') et

(130), on remplace les fonctions hyperboliques par les relations :

$$\sinh \alpha = \frac{e^{\alpha} - e^{-\alpha}}{2} \quad \text{et} \quad \cosh \alpha = \frac{e^{\alpha} + e^{-\alpha}}{2}.$$

On constate que les séries sont très convergentes et qu'il suffit de prendre $n = 0, \pm 1, \pm 2$ et au besoin ± 3 pour de très petits rapports $\frac{h}{b}$.

APPENDICE

Notations et formules fondamentales du calcul vectoriel (1).

Le vecteur sera désigné par une lettre à trait gras ($\mathbf{v}$) et son module par la même lettre à trait fin (v). Considérons un système d'axes $Oxyz$ et trois *vecteurs unitaires* $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ dirigés respectivement suivant Ox , Oy , Oz . Soient v_x , v_y , v_z les projections du vecteur $\mathbf{v}$ sur les mêmes axes, on aura

$$\text{I.} \quad \mathbf{v} = iv_x + jv_y + kv_z.$$

Le *produit scalaire* de deux vecteurs $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$ est

$$\text{II.} \quad \mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mathbf{v} \times \mathbf{u} = u_x v_x + u_y v_y + u_z v_z = uv \cos (\widehat{\mathbf{u}, \mathbf{v}})$$

et leur *produit vectoriel*.

$$\text{III.} \quad \mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = -\mathbf{v} \wedge \mathbf{u} = uv \sin (\widehat{\mathbf{u}, \mathbf{v}}) = i(u_y v_z - u_z v_y) + j(u_z v_x - u_x v_z) + k(u_x v_y - u_y v_x).$$

Entre trois vecteurs on aura les opérations suivantes :

$$\text{IV.} \quad \mathbf{u} \times \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = \mathbf{w} \cdot \mathbf{u} \times \mathbf{v} = wuv \cos (\widehat{\mathbf{u}, \mathbf{v}}).$$

$$\text{V.} \quad \mathbf{u} \times (\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}) = \mathbf{u} \times \mathbf{v} \wedge \mathbf{w} = \mathbf{v} \times \mathbf{w} \wedge \mathbf{u} = \mathbf{w} \times \mathbf{u} \wedge \mathbf{v}.$$

$$\text{VI.} \quad \mathbf{u} \wedge (\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}) = \mathbf{w} \times \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} - \mathbf{v} \times \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}.$$

$$\text{VII.} \quad \text{grad } \varphi = i \frac{\partial \varphi}{\partial x} + j \frac{\partial \varphi}{\partial y} + k \frac{\partial \varphi}{\partial z}.$$

$$\text{VIII.} \quad \text{div } \mathbf{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}.$$

$$\text{IX.} \quad \text{rot } \mathbf{v} = i \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) + j \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) + k \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right).$$

Soit un point P , dont les projections sur les axes $Oxyz$ sont respectivement x , y , z ; on pourra écrire

$$\text{X.} \quad P - O = \mathbf{r} = ix + jy + kz \quad \text{et} \quad dP = d\mathbf{r} = idx + jdy + kdz.$$

$$\text{XI.} \quad \text{rot } \mathbf{r} = 0$$

$$\text{XII.} \quad \text{grad } \frac{1}{r} = -\frac{\mathbf{r}}{r^3}.$$

$$\text{XIII.} \quad \text{rot grad } \varphi = 0.$$

$$\begin{aligned} \text{XIV.} \quad \text{grad } v_x \times \mathbf{v} \cdot \mathbf{i} + \text{grad } v_y \times \mathbf{v} \cdot \mathbf{j} + \text{grad } v_z \times \mathbf{v} \cdot \mathbf{k} \\ = \frac{1}{2} \text{grad } v^2 + (\text{rot } \mathbf{v}) \wedge \mathbf{v}. \end{aligned}$$

(1) Nous employons les notations de Burali-Forti et Marcolongo : *Elementi di Calcolo vettoriale*, Nicola Zanichelli, éditeur, Bologne.

$$\text{XV.} \quad \operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{v} = 0.$$

$$\text{XVI.} \quad \operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi = \nabla^2 \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \quad (1).$$

$$\text{XVII.} \quad \operatorname{div} \operatorname{grad} \mathbf{v} - \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{v} = \nabla^2 \mathbf{v} = \frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial z^2}.$$

$$\text{XVIII.} \quad \operatorname{rot} (m\mathbf{v}) = m \operatorname{rot} \mathbf{v} + \operatorname{grad} m \wedge \mathbf{v}.$$

$$\text{XIX.} \quad \operatorname{div} (m\mathbf{v}) = m \operatorname{div} \mathbf{v} + \operatorname{grad} m \times \mathbf{v}.$$

$$\text{XX.} \quad \operatorname{div} (\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}) = \mathbf{v} \times \operatorname{rot} \mathbf{u} - \mathbf{u} \times \operatorname{rot} \mathbf{v}.$$

$$\text{Soit } \mathbf{v} = \frac{d\mathbf{P}}{dt}, \text{ on aura}$$

$$\text{XXI.} \quad \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{i} \frac{du_x}{dt} + \dots = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{1}{2} \operatorname{grad} v^2 + (\operatorname{rot} \mathbf{v}) \wedge \mathbf{v}.$$

Désignons plus loin par τ et σ respectivement le volume et la surface extérieure, par $\mathbf{n}$ le vecteur unitaire normal à cette surface, par C un contour fermé quelconque, par Σ une surface s'appuyant sur ce contour et par $\mathbf{t}$ le vecteur unitaire tangent; on aura :

$$\text{XXII.} \quad \int_{\sigma} \mathbf{n} d\sigma = 0.$$

$$\text{XXIII.} \quad \int_{\tau} \operatorname{rot} \mathbf{v} d\tau = - \int_{\sigma} \mathbf{n} \wedge \mathbf{v} d\sigma.$$

$$\text{XXIV.} \quad \int_{\tau} \operatorname{grad} \varphi d\tau = \int_{\sigma} \varphi \mathbf{n} d\sigma.$$

$$\text{XXV.} \quad \int_{\tau} \operatorname{div} \mathbf{v} d\tau = - \int_{\sigma} \mathbf{n} \times \mathbf{v} d\sigma.$$

$$\text{XXVI.} \quad \int_{\Sigma} \operatorname{rot} \mathbf{v} d\sigma = \int_C \mathbf{v} \times \mathbf{t} ds.$$

Pour écrire le théorème de la variation du flux du vecteur $\mathbf{v}$ à travers une surface Σ , nous allons désigner par $\mathbf{u}$ la vitesse d'un point de cette surface :

$$\text{XXVII.} \quad \frac{d}{dt} \int_{\Sigma} \mathbf{n} \times \mathbf{v} d\sigma = \int_{\Sigma} \left\{ \frac{\partial (\mathbf{n} \times \mathbf{v})}{\partial t} + \mathbf{n} (\mathbf{u} \operatorname{div} \mathbf{v} + \operatorname{rot} (\mathbf{v} \wedge \mathbf{u})) \right\} d\sigma.$$

(1) $\operatorname{div} \operatorname{grad}$ représente le Laplacien qu'on désigne couramment par Δ .

BIBLIOGRAPHIE ⁽¹⁾

- APPELL (P.). — *Traité de Mécanique*, t. III (Gauthier-Villars et Cie, Paris).
- BETZ (A.). — *Beiträge zur Tragflügeltheorie mit besonderer Berücksichtigung des einfachen rechteckigen Flügels* (Dissertation, Göttingen, 1919, R. Oldenbourg, München).
- *Wirbel und im Zusammenhang damit stehende Begriffe der Hydrodynamik*, Z. F. M., 1920, page 193.
- *Eine Verallgemeinerung der Joukowskyschen Flügelabbildung*, Z. F. M., 1924, page 100.
- BIEBERBACH (L.). — *Zur Theorie und Praxis der Konformen Abbildung*, Rendiconti di Palermo, t. XXXVIII, 1914.
- *Ueber die Konforme Kreisabbildung nahezu Kreisförmigen Bereiche*, Sitzungsber. der Preuss. Akad. d. W., 1924, page 181.
- BIRNBAUM (W.). — *Die tragende Wirbelfläche als Hilfsmittel zur Behandlung des ebenen Problems der Tragflügeltheorie*, Z. A. M. M., 1923, page 290.
- *Das ebene Problem des schlagenden Flügels*, Z. A. M. M., 1924, page 277.
- BJERNES (V.). — *Zur Berechnung der auf Tragflächen wirkenden Kräfte*, V. G. H.-A., page 59.
- BLASIUS (H.). — *Funktionentheoretische Methoden in der Hydrodynamik*, Z. M. F., 1910, vol. 58, page 90.
- BOUASSE (H.). — *Hydrodynamique générale* (Librairie Delagrave, Paris).
- CARATOLI (E.). — C. R. A. S., t. CLXXXV, page 842, séance du 24 octobre 1927 ; t. CLXXXV, page 1914, séance du 14 novembre 1927 ; t. CLXXXV, page 1189, séance du 28 novembre 1927 ; t. 186, page 1196, séance du 30 avril 1928.
- (TOUSSAINT et). — *Théorie et Tracé des profils d'ailes sustentatrices*, Librairie Etienne Chiron, 40, rue de Seine, Paris.
- CALDONAZZO (B.). — *Ueber die gleichförmige Rotation eines festen Körpers in einer unbegrenzten Flüssigkeit*, V. G. H.-A., page 175.
- CISOTTI (U.). — *Idromeccanica piana*, 2 volumes (Libreria editrice Politecnica, Milano, 1922).
- FLORINE (N.). — *Trainée induite des ailes d'avions*, Bulletin du Lab. Aérotech. de Belgique, janvier 1922, page 6.
- FUCHS (und Hopf). — *Aerodynamik* (Richard Carl Schmidt et Cie, 1922, Berlin W 62).
- GLAUERT (H.). — *The Elements of Aerofoil and Airscrew Theory* (Cambridge University Press, 1926).
- GRAMMEL (R.). — *Die hydrodynamischen Grundlagen des Fluges* (Fried. Vieweg et Sohn, Braunschweig, 1917).
- HÖHNDORF (F.). — *Verfahren zur Berechnung des Auftriebes gegebener, Tragflächen-Profile*, Z. A. M. M., 1926, page 265.
- HOPF (voir Fuchs und Hopf).
- JOUKOWSKI (N.). — *Aérodynamique* (Gauthier-Villars, Paris, 1916).
- *De la chute dans l'air de corps légers de forme allongée, animés d'un mouvement rotatoire*, Bull. de l'Inst. Aéro. de Koutchino, fasc. I, page 51, 1912.

(1) Abréviations :

- Z. F. M. = Zeit. für Flugtechnik und Motorluftschiffart.
 Z. A. M. M. = Zeit. für Angewandte Mathematik und Mechanik.
 V. G. H.-A. = Vorträge aus dem Gebiete der Hydro- und Aerodynamik.
 Z. M. F. = Zeit. für Mathematik und Physik.
 N. A. C. A. = National Advisory Committee for Aeronautics.

- KARMAN (Th. von) und TREFFTZ (E.). — *Potentialströmung um gegebene Tragflächenquerschnitte*, Z. F. M., 1918.
- LAMB (H.). — *Hydrodynamics*.
- MUNK (M.). — *Isoperimetrische Aufgaben aus der Theorie des Fluges* (Dissertation, Göttingen, 1919).
- *General theory of thin wing sections*, N. A. C. A., 142, 1922.
- *The relation between the induced yawing moment and the rolling moment for an aerofoil in straight motion*, N. A. C. A., 197, 1924.
- MÜLLER (W.). — *Die Ermittlung von Auftriebsinvarianten vorgegebener Profile*, Z. A. M. M., page 397, octobre 1925.
- PISTOLESI (E.). — *Tecnia dei vortici applicata ai sistemi portanti*, Rendiconti dell'Istituto sperimentale Aeronautico, Février 1922 et Avril 1922.
- FRANKE (L.). — *Tragflügeltheorie*, I und II Mitteilung, Nachr. der Kgl. Gesel. der Wissen. zu Göttingen : Math.-Phys. Klasse.
- *Applications of Modern Hydrodynamics to Aeronautics*, N. A. C. A., 116, 1921.
- *Ueber die Entstehung von Wirbeln in der idealen Flüssigkeit, mit Anwendung auf die Tragflügeltheorie und andere Aufgaben*, V. G. H.-A. page 18.
- *Ergebnisse der Aero. Versuchsanstalt zu Göttingen*, I, II et III Lieferung (R. Oldenbourg, München und Berlin).
- ROY (M.). — *Sur la théorie des surfaces portantes* (Scientia, Gauthier-Villars, Paris).
- RIABOUCHIMSKY (D.). — *Thèses*, Faculté des Sciences, Paris Gauthier-Villars, Paris).
- *Recherches théoriques d'Aérodynamique*, Bulletin Technique, Ser. tech. de l'Aéro., Avril 1924.
- TREFFTZ (E.). — *Prandlsche Tragflächen- und Propeller-Theorie*, Z. A. M. M., 1921, t. I, page 206.
- TOUSSAINT (A.). — *L'Aviation actuelle* (Librairie Félix Alcan, Paris).
- (et CARAFOLI). — *Théorie et Tracé des Profils*.....
- VILLAT (H.). — *Aperçus théoriques sur la résistance des Fluides* (Scientia, Gauthier-Villars, Paris).
- WIESELSBERGER (C.). — *Zur Theorie des Tragflügels bei gekrümmter Flugbahn*, Z. A. M. M., 1922, page 325.
- *Theoretische Untersuchungen über die Querruderwirkung beim Tragflügel*, Rep. of the Aero. Research. Inst. Tôkiô Imperial University, n° 30, décembre 1927 (Vol. II, 16).

TABLE DES MATIÈRES

	Pages
Avant-Propos	vii
CHAPITRE PREMIER. — INTRODUCTION A LA THÉORIE DE LA SUSTENTATION	
§ 1. — <i>Lois fondamentales de l'Hydrodynamique</i> : 1) Equations générales ; 2) Théorème de la circulation ; 3) Equations de la pression ; 4) Mouvement impulsif ; 5) Conditions à la limite, Connexion ; 6) Energie cinétique	1
§ 2. — <i>Propriétés des Tourbillons</i> : 1) Champ des vitesses ; 2) Quantité de mouvement communiquée par un anneau-tourbillon ; 3) Couche de tourbillons	7
§ 3. — <i>Application à l'Aérodynamique</i> : 1) Aile sustentatrice fluide ; 2) Résultante aérodynamique ; 3) Distribution de la circulation dans la nappe des tourbillons libres	12
CHAPITRE II. — MOUVEMENT PLAN PARALLÈLE (AILE D'ENVERGURE INFINIE).	
§ 1. — <i>Introduction des fonctions d'une variable complexe</i> : 1) Potentiel et vitesse complexes ; 2) Représentation conforme ; 3) Forme générale de la fonction $z = z(\zeta)$	20
§ 2. — <i>Mouvement général autour d'un contour</i> : 1) Relation fondamentale ; 2) Equation de la pression ; 3) Résultante aérodynamique ; 4) Moment résultant	27
§ 3. — <i>Translation rectiligne et uniforme</i> : 1) Représentation du mouvement dans le plan du cercle ; 2) Effort sustentateur et moment ; 3) Détermination de la circulation, Hypothèse de Joukowski ; 4) Etude des profils aérodynamiques ; 5) Calcul des vitesses	34
§ 4. — <i>Mouvement de rotation</i> : 1) Détermination du mouvement autour du cercle ; 2) Rotation uniforme, Résultante aérodynamique et moment, Circulation ; 3) Plan mince en rotation uniforme	54
§ 5. — <i>Application du mouvement général</i> : 1) Régime oscillatoire autour d'un profil d'aile ; 2) Théorie du rotor à palette	64
CHAPITRE III. — THÉORIE DE L'AILE D'ENVERGURE LIMITÉE	
§ 1. — <i>Questions générales</i> : 1) Distribution de la circulation pour une vitesse induite donnée le long de l'envergure ; 2) Déterminer les caractéristiques géométriques d'une aile pour une distribution donnée de la circulation le long de l'envergure ; 3) Pour une portance totale donnée, déterminer la loi de variation de la circulation correspondant au minimum de traînée	72
§ 2. — <i>Caractéristiques aérodynamiques d'une aile</i> : 1) Formules générales ; 2) Aile de forme en plan elliptique ; 3) Aile rectangulaire ; 4) Application aux ailes avec ailerons	78

	Pages
§ 3. — <i>Aile d'envergure limitée en rotation uniforme autour d'un axe parallèle à l'envergure</i> : 1) Vitesse radiale due à un anneau-tourbillon circulaire ; 2) Vitesse induite totale et détermination des caractéristiques de l'aile	88

CHAPITRE IV. — INFLUENCE DES PAROIS ET DES SURFACES LIBRES

§ 1. — <i>Courant à deux dimensions</i> : 1) Influence du sol ; 2) Veine limitée par des parois rigides ou surfaces libres	95
§ 2. — <i>Courant à trois dimensions</i> : 1) Tunnel circulaire ; 2) Tunnel rectangulaire	101
Appendice (Notations et formules fondamentales du calcul vectoriel).	111
Bibliographie	113

DEUXIÈME THÈSE

Propositions données par la Faculté.

SUR LA THEORIE TOURBILLONNAIRE DES HÉLICES

VU ET APPROUVÉ :

Paris, le 9 Juillet 1928.

Le Doyen de la Faculté des Sciences,

CH. MAURAIN.

VU ET PERMIS D'IMPRIMER :

Le Recteur de l'Académie de Paris.

S. CHARLÉTY.

